

# Contrôle 3

## Le coin des définitions et des théorèmes :

1. Donner la définition de la continuité en  $a$ .
2. Quand dit-on qu'une fonction est équivalente à une autre au voisinage de  $x_0$  ?
3. Que signifie le mot « affixe » ?
4. Donner la formule du binôme.
5. Quand dit-on qu'une fonction est négligeable devant une autre au voisinage de  $x_0$  ?
6. Donner la formule donnant la somme partielle d'une suite géométrique.

## Les équations diff :

1. Intégrer l'équation diff :  $2xy' - 3y = 4x^5$  à l'aide de la méthode de variation de la constante. Pourquoi est-il nécessaire a priori d'utiliser la MVC ?
2. Résoudre l'équation diff  $4y'' + 4y' + y = x^2 + 9x + 9$

## Les complexes :

1. Trouver les deux racines du polynôme  $P(z) = iz^2 - 5z + 1 - 7i$ .
2. INSA Strasbourg 2014 : Calculer  $\left(\frac{1-i}{i}\right)^4$  ainsi que  $\frac{2+3i}{5-i}$
3. INSA Strasbourg 2014 : Ecrire à l'aide de la notation exponentielle les complexes suivants :  
 $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$      $z_2 = \frac{1+i}{1-i}$      $z_3 = -5$      $z_4 = (z_2)^{16}$
4. INSA Strasbourg 2016 : Quelle est la forme algébrique de  $z_1 = 6e^{5i\frac{\pi}{6}}$  et de  $z_2 = 18e^{19i\frac{\pi}{2}}$ .
5. quelle sont les racines cinquièmes de  $-32$  ?

## Calcul - Récurrence

Soit  $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$  où  $n$  est un entier naturel. Vérifier que  $I_0 = 1$ .

1. A l'aide d'une intégration par partie, prouver la relation ( R )  $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ .

( On peut admettre ce résultat et passer à la question suivante )

( Si toutefois on souhaite faire l'IPP, on posera  $I_n = \int_0^1 1 \cdot (1 - x^2)^n dx$  puis, lorsqu'on rencontrera un pauvre  $x^2$  esseulé dans l'intégration par partie, on le transformera en  $1 - (1 - x^2)$  )

2. Montrer par récurrence, à l'aide de la relation ( R ), que  $I_n = \frac{2 \cdot 4 \dots (2n)}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3. Donner une écriture de  $I_n$  à l'aide de puissances et de factoriels.

## DLs et calculs de limites :

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 en  $x_0 = 1$  de la fonction  $\frac{\ln(x)}{1-x}$

Equation de la tangente D en 1 et position de la courbe par rapport à D

2. Calculer  $\lim_0 \frac{x(2x^2 - \ln(\cos(3x)))}{\tan(x) - \sin(x)}$

3. Donner un équivalent en  $0^+$  et en  $+\infty$  de  $\sqrt{x + x^2}$ ; et en  $1^+$  de  $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$

## Continuité :

La fonction  $x \rightarrow \frac{x(2x^2 - \ln(\cos(3x)))}{\tan(x) - \sin(x)}$  est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

( On pourra utiliser le résultat de la question 2 sur les dl; inutile de recommencer les calculs )

# Problème

Le but de ce problème est de démontrer les formules permettant de calculer la distance d'un point à une droite dans  $\mathbb{R}^2$  ou dans  $\mathbb{R}^3$  ainsi que la distance d'un point à un plan dans  $\mathbb{R}^3$ .

## Première partie

# Distance d'un point à une droite dans $\mathbb{R}^2$

## 1 Un exemple

D est la droite d'équation  $2x + y = 3$ .

11. Quelle est l'équation de la droite vectorielle  $\vec{D}$  associée à D ?
12. Donner un vecteur directeur de D ainsi qu'un vecteur normal à D .
13. Le point A (2;1) appartient-il à D ?
14. Donner des équations paramétriques de la droite  $\Delta$  orthogonale à D et passant par A.
15. En déduire une équation cartésienne de  $\Delta$  .
16. Donner les coordonnées du point B , intersection de D et  $\Delta$  .
17. En déduire la valeur de  $||\vec{AB}||$
18. Calculer  $\frac{|2x_A+y_A-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$  . Que constate-t-on ?

## 2 Cas général

D est la droite d'équation  $ax + by + c = 0$  .

21. Quelle est l'équation de la droite vectorielle  $\vec{D}$  associée à D ?
22. Donner un vecteur directeur de D ainsi qu'un vecteur normal à D .
23. Donner des équations paramétriques de la droite  $\Delta$  orthogonale à D et passant par A ( $x_A; y_A$ )
24. En déduire une équation cartésienne de  $\Delta$  .
25. Donner les coordonnées du point B , intersection de D et  $\Delta$
26. En déduire la valeur de  $\vec{AB}$  , puis celle de  $d(A, B) = ||\vec{AB}||$  .
27. Conclure en énonçant une formule générale pour la distance d'un point à une droite dans  $\mathbb{R}^2$ .

## Application

28. Dans le triangle de sommet A(2;0) ; B(-2;2) et C(6;4) ,  
calculer la distance du centre du cercle circonscrit ( intersection des médiatrices ) à la droite (AB)

## Deuxième partie

# Distance d'un point à un plan dans $\mathbb{R}^3$

### 3 Un exemple

P est le plan d'équation  $2x + y - z = 2$ .

31. Quelle est l'équation cartésienne du plan vectoriel  $\vec{P}$  associée à P ?

32. Donner deux vecteurs directeurs de P ainsi qu'un vecteur normal à P .

33. Le point A (2;1;4) appartient-il à P ?

34. Donner des équations paramétriques de la droite  $\Delta$  orthogonale à P et passant par A.

35. Donner les coordonnées du point B , intersection de P et  $\Delta$  .

36. En déduire la valeur de  $||\vec{AB}||$

37. Calculer  $\frac{|2x_A + y_A - z_A - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}}$  . Que constate-t-on ?

### 4 Cas général

P est le plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  .

41. Quelle est l'équation cartésienne du plan vectoriel  $\vec{P}$  associée à P ?

42. Donner deux vecteurs directeurs de P ainsi qu'un vecteur normal à P .

43. Donner des équations paramétriques de la droite  $\Delta$  orthogonale à P et passant par A ( $x_A; y_A; z_A$ )

44. Donner les coordonnées du point B , intersection de P et  $\Delta$  .

45. En déduire la valeur de  $\vec{AB}$  , puis celle de  $d(A, B) = ||\vec{AB}||$  .

46. Conclure en énonçant une formule générale pour la distance d'un point à un plan dans  $\mathbb{R}^3$ .

## Troisième partie

# Distance d'un point une droite dans $\mathbb{R}^3$

## 5 Mise en situation

On désigne par H le projeté orthogonal d'un point A sur une droite D de l'espace.

La distance AH est la plus petite des distances de A à un point quelconque M de la droite D.

En effet, le triangle AMH est rectangle en H et l'hypothénuse AM est plus grande que AH.

Nous allons détailler quelques méthodes pour calculer cette distance.

Le contexte est le même dans chaque cas : Le point A a pour coordonnées (2;3;-1) et la droite

D a pour représentation paramétrique : 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad ( t \in \mathbb{R} )$$

## 6 Première méthode :

On exprime en fonction de t la distance AM. On étudie les variations de cette fonction et on en cherche le minimum :

61. Exprimer la distance AM en fonction de t. On note f cette fonction.

62. Dresser le tableau de variation de f. En déduire la distance AH.

## 7 Deuxième méthode :

On détermine une équation du plan P contenant A et perpendiculaire à la droite D.

Le point d'intersection de ce plan avec D est H et il ne reste plus qu'à calculer la distance AH.

A vous de jouer !

71. Donner un vecteur normal à P. En déduire une équation cartésienne de P.

72. Trouver les coordonnées de H.

73. Conclure.

## 8 Troisième méthode :

Un calcul direct de H : H est un point de la droite D correspondant au paramètre  $t_H$  .

81. Exprimer  $\overrightarrow{AH}$  en fonction de  $t_H$  .

82. Donner les coordonnées de  $\vec{u}$  , vecteur directeur de D.

83. Exprimer le produit scalaire de  $\vec{u}$  et de  $\overrightarrow{AH}$  en fonction de  $t_H$  .

84. Conclure.