

Contrôle 3

Le coin des définitions et des théorèmes :

1. Donner la définition de la continuité en a .
2. Quand dit-on qu'une fonction est équivalente à une autre au voisinage de x_0 ?
3. Que signifie le mot « affixe » ?
4. Donner la formule du binôme.
5. Quand dit-on qu'une fonction est négligeable devant une autre au voisinage de x_0 ?
6. Donner la formule donnant la somme partielle d'une suite géométrique.

Les équations différentielles :

1. Intégrer l'équation différentielle : $2xy' - 3y = 4x^5$ à l'aide de la méthode de variation de la constante. Pourquoi est-il nécessaire a priori d'utiliser la MVC ?
2. Résoudre l'équation différentielle $4y'' + 4y' + y = x^2 + 9x + 9$

Les complexes :

1. Trouver les deux racines du polynôme $P(z) = iz^2 - 5z + 1 - 7i$.
2. INSA Strasbourg 2014 : Calculer $\left(\frac{1-i}{i}\right)^4$ ainsi que $\frac{2+3i}{5-i}$
3. INSA Strasbourg 2014 : Ecrire à l'aide de la notation exponentielle les complexes suivants :
 $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ $z_2 = \frac{1+i}{1-i}$ $z_3 = -5$ $z_4 = (z_2)^{16}$
4. INSA Strasbourg 2016 : Quelle est la forme algébrique de $z_1 = 6e^{5i\frac{\pi}{6}}$ et de $z_2 = 18e^{19i\frac{\pi}{2}}$.
5. quelle sont les racines cinquièmes de -32 ?

Calcul - Récurrence

Soit $I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx$ où n est un entier naturel. Vérifier que $I_0 = 1$.

1. A l'aide d'une intégration par partie, prouver la relation (R) $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.

(On peut admettre ce résultat et passer à la question suivante)

(Si toutefois on souhaite faire l'IPP, on posera $I_n = \int_0^1 1 \cdot (1 - x^2)^n dx$ puis, lorsqu'on rencontrera un pauvre x^2 esseulé dans l'intégration par partie, on le transformera en $1 - (1 - x^2)$)

2. Montrer par récurrence, à l'aide de la relation (R), que $I_n = \frac{2 \cdot 4 \dots (2n)}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3. Donner une écriture de I_n à l'aide de puissances et de factoriels.

DLs et calculs de limites :

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 en $x_0 = 1$ de la fonction $\frac{\ln(x)}{1-x}$

Equation de la tangente D en 1 et position de la courbe par rapport à D

2. Calculer $\lim_0 \frac{x(2x^2 - \ln(\cos(3x)))}{\tan(x) - \sin(x)}$

3. Donner un équivalent en 0^+ et en $+\infty$ de $\sqrt{x + x^2}$; et en 1^+ de $\sqrt{-x^2 + 3x - 2}$

Continuité :

La fonction $x \rightarrow \frac{x(2x^2 - \ln(\cos(3x)))}{\tan(x) - \sin(x)}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

(On pourra utiliser le résultat de la question 2 sur les dl; inutile de recommencer les calculs)

Problème

Le but de ce problème est de démontrer les formules permettant de calculer la distance d'un point à une droite dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{R}^3 ainsi que la distance d'un point à un plan dans \mathbb{R}^3 .

Première partie

Distance d'un point à une droite dans \mathbb{R}^2

1 Un exemple

D est la droite d'équation $2x + y = 3$.

11. Quelle est l'équation de la droite vectorielle \vec{D} associée à D ?
12. Donner un vecteur directeur de D ainsi qu'un vecteur normal à D .
13. Le point A (2;1) appartient-il à D ?
14. Donner des équations paramétriques de la droite Δ orthogonale à D et passant par A.
15. En déduire une équation cartésienne de Δ .
16. Donner les coordonnées du point B , intersection de D et Δ .
17. En déduire la valeur de $||\vec{AB}||$
18. Calculer $\frac{|2x_A+y_A-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$. Que constate-t-on ?

2 Cas général

D est la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

21. Quelle est l'équation de la droite vectorielle \vec{D} associée à D ?
22. Donner un vecteur directeur de D ainsi qu'un vecteur normal à D .
23. Donner des équations paramétriques de la droite Δ orthogonale à D et passant par A ($x_A; y_A$)
24. En déduire une équation cartésienne de Δ .
25. Donner les coordonnées du point B , intersection de D et Δ
26. En déduire la valeur de \vec{AB} , puis celle de $d(A, B) = ||\vec{AB}||$.
27. Conclure en énonçant une formule générale pour la distance d'un point à une droite dans \mathbb{R}^2 .

Application

28. Dans le triangle de sommet A(2;0) ; B(-2;2) et C(6;4) ,
calculer la distance du centre du cercle circonscrit (intersection des médiatrices) à la droite (AB)

Deuxième partie

Distance d'un point à un plan dans \mathbb{R}^3

3 Un exemple

P est le plan d'équation $2x + y - z = 2$.

31. Quelle est l'équation cartésienne du plan vectoriel \vec{P} associée à P ?

32. Donner deux vecteurs directeurs de P ainsi qu'un vecteur normal à P .

33. Le point A (2;1;4) appartient-il à P ?

34. Donner des équations paramétriques de la droite Δ orthogonale à P et passant par A.

35. Donner les coordonnées du point B , intersection de P et Δ .

36. En déduire la valeur de $||\vec{AB}||$

37. Calculer $\frac{|2x_A+y_A-z_A-2|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}$. Que constate-t-on ?

4 Cas général

P est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

41. Quelle est l'équation cartésienne du plan vectoriel \vec{P} associée à P ?

42. Donner deux vecteurs directeurs de P ainsi qu'un vecteur normal à P .

43. Donner des équations paramétriques de la droite Δ orthogonale à P et passant par A $(x_A; y_A; z_A)$

44. Donner les coordonnées du point B , intersection de P et Δ .

45. En déduire la valeur de \vec{AB} , puis celle de $d(A, B) = ||\vec{AB}||$.

46. Conclure en énonçant une formule générale pour la distance d'un point à un plan dans \mathbb{R}^3 .

Troisième partie

Distance d'un point une droite dans \mathbb{R}^3

5 Mise en situation

On désigne par H le projeté orthogonal d'un point A sur une droite D de l'espace.

La distance AH est la plus petite des distances de A à un point quelconque M de la droite D.

En effet, le triangle AMH est rectangle en H et l'hypothénuse AM est plus grande que AH.

Nous allons détailler quelques méthodes pour calculer cette distance.

Le contexte est le même dans chaque cas : Le point A a pour coordonnées (2;3;-1) et la droite

D a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

6 Première méthode :

On exprime en fonction de t la distance AM. On étudie les variations de cette fonction et on en cherche le minimum :

61. Exprimer la distance AM en fonction de t. On note f cette fonction.

62. Dresser le tableau de variation de f. En déduire la distance AH.

7 Deuxième méthode :

On détermine une équation du plan P contenant A et perpendiculaire à la droite D.

Le point d'intersection de ce plan avec D est H et il ne reste plus qu'à calculer la distance AH.

A vous de jouer !

71. Donner un vecteur normal à P. En déduire une équation cartésienne de P.

72. Trouver les coordonnées de H.

73. Conclure.

8 Troisième méthode :

Un calcul direct de H : H est un point de la droite D correspondant au paramètre t_H .

81. Exprimer \overrightarrow{AH} en fonction de t_H .

82. Donner les coordonnées de \vec{u} , vecteur directeur de D.

83. Exprimer le produit scalaire de \vec{u} et de \overrightarrow{AH} en fonction de t_H .

84. Conclure.