

# CONTROLE 1

## PROBLEME

### Partie I : Introduction : Quelques cas particuliers

Parmi les nombres réels, il y a les entiers ( ... ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ... ) ainsi que les rationnels ( c'est à dire les nombres que l'on peut écrire de la forme  $\frac{p}{q}$  avec p et q des entiers , q étant non nul bien sûr )

Mais il y en a plein d'autres ! Que l'on ne peut pas écrire de la forme  $\frac{p}{q}$  avec p et q des entiers.

Comme  $\sqrt{2}$  par exemple.

Ces derniers sont appelés les irrationnels.

Ils sont un peu difficiles à appréhender, et pour mieux les cerner, on essaie de les approcher par des rationnels.

Le but de ce problème est de trouver une bonne façon d'approximer les irrationnels (relativement compliqués) par des rationnels (relativement simples)

On s'intéresse tout particulièrement à l'irrationnel  $\sqrt{2022}$ .

1. Pour x réel, on note  $E(x)$  la **partie entière** de x. C'est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Ainsi par exemple,  $E(1,7)=1$ . On dit que la partie entière de 1,7 vaut 1.

De même,  $E(1,6)=1$  ;  $E(27,42)=27$  ;  $E(3)=3$  ;  $E(-4)=-4$  et attention :  $E(-7,5)=-8$ .

En effet, -7 est plus grand que -7,5!!

Quelle est la partie entière de  $\pi$  ? de  $\sqrt{19}$  ?

2. Calculer  $44^2$  et  $45^2$ . En déduire que la partie entière de  $\sqrt{2022}$  est 44.

3. Si x n'est pas un entier, on pose  $f(x) = \frac{1}{x-E(x)}$ . Pourquoi est-il nécessaire que x ne soit pas un entier ?

Montrer que  $f(3,7) = \frac{10}{7}$ .

Que vaut  $E(f(3,7))$  ? Calculer  $f(f(3,7))$ .

( On écrira le résultat de la forme  $\frac{p}{q}$  où p et q sont des entiers naturels les plus petits possibles. )

Calculer  $f(f(f(3,7)))$ .

Pourquoi ne peut-on pas continuer ainsi ?

4. Voici comment on peut calculer  $f(\sqrt{19})$  :

$4^2 = 16$  et  $5^2 = 25$ , donc  $\sqrt{19}$  est compris entre 4 et 5. Donc  $E(\sqrt{19}) = 4$ .

$f(\sqrt{19}) = \frac{1}{\sqrt{19}-4}$ . On multiplie alors en haut et en bas par  $\sqrt{19} + 4$ .

$f(\sqrt{19}) = \frac{\sqrt{19}+4}{(\sqrt{19}-4)(\sqrt{19}+4)} = \frac{\sqrt{19}+4}{\sqrt{19^2-4^2}} = \frac{\sqrt{19}+4}{19-16} = \frac{\sqrt{19}+4}{3}$ . Et voilà!

Calculer  $f(\sqrt{2022})$  en reproduisant cette méthode. ( On trouve  $f(\sqrt{2022}) = \frac{\sqrt{2022+44}}{86}$  )

Montrer que la partie entière de  $f(\sqrt{2022})$  vaut 1.

5. Voici comment on calcule  $f(f(\sqrt{19}))$  ou encore  $f\left(\frac{\sqrt{19}+4}{3}\right)$ .

$\sqrt{19}$  est compris entre 4 et 5, donc  $\sqrt{19} + 4$  est compris entre 8 et 9.

La partie entière de  $\frac{8}{3}$  vaut 2, donc  $E\left(\frac{\sqrt{19}+4}{3}\right) = 2$ .

$f(f(\sqrt{19})) = f\left(\frac{\sqrt{19}+4}{3}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{19}+4}{3}-2}$ . On multiplie en haut et en bas par 3.

$f(f(\sqrt{19})) = \frac{3}{\sqrt{19}+4-6} = \frac{3}{\sqrt{19}-2}$ . On multiplie alors en haut et en bas par  $\sqrt{19} + 2$ .

On obtient :  $f(f(\sqrt{19})) = \frac{3(\sqrt{19}+2)}{(\sqrt{19}-2)(\sqrt{19}+2)} = \frac{3(\sqrt{19}+2)}{19-4} = \frac{3(\sqrt{19}+2)}{15}$

Pour finir, on simplifie par 3 :  $f(f(\sqrt{19})) = \frac{\sqrt{19}+2}{5}$  car  $15 = 3 \times 5$

Utilisez cette méthode pour calculer  $f(f(\sqrt{2022}))$ .

Allez, deux indices :  $42^2 = 1764$  et  $3 \times 86 = 258$ .

6. Montrer que la partie entière de  $f(f(\sqrt{2022})) = 28$  et calculer  $f(f(f(\sqrt{2022})))$

( on trouve :  $f(f(f(\sqrt{2022}))) = \frac{\sqrt{2022+42}}{86}$  )

7. Calculer  $f(f(f(f(\sqrt{2022}))))$

8. Vérifier que  $f(f(f(f(f(\sqrt{2022})))))) = f(\sqrt{2022})$

On est revenu à la question 4. il est donc inutile de calculer les suivants.

9. Montrer que pour tout  $x$  non entier,  $f(x) > 1$

## PARTIE II : Les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

10. Comme on l'a vu dans la partie 1, lorsque  $x$  n'est pas un rationnel, le calcul des  $f(f(f(\dots)))$  est toujours possible.

C'est pourquoi on introduit les notations suivantes :

On note  $x_0 = x$ ;  $x_1 = f(x_0)$ ;  $x_2 = f(x_1)$ ; ... De manière générale, si  $n$  est un entier naturel,  $x_{n+1} = f(x_n)$

Lorsque  $x = \sqrt{19}$ , on trouve donc  $x_0 = \sqrt{19}$ ;  $x_1 = \frac{\sqrt{19+4}}{3}$ ;  $x_2 = \frac{\sqrt{19+2}}{5}$  et on n'a pas calculé les suivants.

Que valent les  $x_n$  lorsque  $x = \sqrt{2022}$  ?

( On peut ici donner  $x_0$ ;  $x_1$ ; ...;  $x_5$  et expliquer comment on trouve tous les suivants. )

11. On note  $y_n$  la partie entière de  $x_n$ . Lorsque  $x = \sqrt{2022}$ , que valent les  $y_n$  ?

12. **Dorénavant,  $x$  est un irrationnel quelconque. Il n'est plus égal à  $\sqrt{2022}$**

Avec ces nouvelles notations, comme  $x_{n+1} = f(x_n)$  et  $f(x) = \frac{1}{x-E(x)}$  :

$$\boxed{x_0 = x} \text{ et } \boxed{x_{n+1} = \frac{1}{x_n - y_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Exprimer  $x_1$  en fonction de  $x$  et  $y_0$ ; puis  $x_2$  en fonction de  $x$ ;  $y_0$  et  $y_1$ .

( on aura bien sûr fait le ménage nécessaire pour qu'il n'y ai plus qu'un seul trait de fraction! )

Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\boxed{x_n = y_n + \frac{1}{x_{n+1}}}$

13. On définit aussi les suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{aligned} p_0 = y_0 & & q_0 = 1 & & p_1 = y_0 y_1 + 1 & & q_1 = y_1 \\ p_n = p_{n-1} y_n + p_{n-2} & & q_n = q_{n-1} y_n + q_{n-2} & & \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Grâce à la question 9, montrer que pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $y_k \geq 1$ .

En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n \neq 0$ ; puis que la suite  $(q_n)$  est strictement croissante à partir de  $n = 1$ .

14. Montrer que  $q_1$ ;  $q_2$  et  $q_3$  sont supérieurs respectivement à 1; 2 et 3.

Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $q_n \geq n$ . En déduire la limite de  $q_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

15. Montrer que  $x = \frac{p_1 x_2 + p_0}{q_1 x_2 + q_0}$  ( on calcule  $\frac{p_1 x_2 + p_0}{q_1 x_2 + q_0}$  grâce au  $x_2$  de la question 12 )

Montrer par récurrence que  $\forall n \geq 2$ ,  $x = \frac{p_{n-1} x_n + p_{n-2}}{q_{n-1} x_n + q_{n-2}}$

Indication : Pour l'hérédité, il suffit de remplacer le  $x_n$  ci-dessus par sa valeur trouvée dans la question 12, et de faire le ménage, bien sûr !

## PARTIE III : Les convergents $c_n$

16. Montrer par récurrence que  $\forall n \geq 2$ ,  $p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1} = (-1)^n$

Indication : Pour l'hérédité, après avoir écrit ce que l'on doit démontrer, il suffit de remplacer les  $p_n$  et  $q_n$  par leurs valeurs respectives et de faire le ménage. Essayez, c'est plus facile qu'il n'y paraît !

17. Pour  $n \geq 1$ , que vaut  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n$  ?

18. On pose  $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ . Montrer que  $c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n-1} q_n}$ . ( facile avec la question précédente! )

19. Montrer que  $x - c_{2n} = \frac{x_{2n} - y_{2n}}{(q_{2n-1} x_{2n} + q_{2n-2})(q_{2n-1} y_{2n} + q_{2n-2})}$

( c'est assez fastidieux, mais il suffit de réduire au dénominateur les deux fractions ; celle correspondant à  $x$  se trouve dans la question 15 pour  $2n$  au lieu de  $n$  et celle correspondant à  $c_{2n}$  s'obtient avec les définitions des  $p_n$  et des  $q_n$  de la question 13)

En déduire que  $c_{2n} < x$  pour tout  $n \geq 1$ .

20. On montre avec un calcul identique que  $x < c_{2n+1}$ . On ne demande pas de faire le calcul.

On sait maintenant que  $x$  est compris entre  $c_{2n}$  et  $c_{2n+1}$  ; et aussi compris entre  $c_{2n+1}$  et  $c_{2n+2}$ .

Donc  $x$  est compris entre deux  $c_n$  consécutifs ; et en particulier :  $|x - c_n| < |c_{n+1} - c_n|$  pour tout  $n \geq 1$ .

Montrer que  $|x - c_n| < \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{q_n^2}$ .

En déduire que la suite  $(c_n)$  tend vers  $x$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Voilà pourquoi cette suite s'appelle la suite des convergents.

21. On vient de fabriquer une suite de nombres rationnels convergents vers l'irrationnel  $x$ .

Nous allons montrer désormais qu'on ne peut pas mieux faire !

Supposons que le rationnel  $\frac{p}{q}$  est encore plus proche de  $x$ , alors  $|\frac{p}{q} - c_n| < \frac{1}{q_n^2}$  et, bien sûr  $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$

Expliquer pourquoi  $|pq_n - qp_n| \geq 1$

En réduisant les fractions au même dénominateur, montrer que  $|\frac{p}{q} - c_n| \geq \frac{1}{qnq}$

En déduire que  $q \geq q_n$ .

Et voilà, si un rationnel est plus proche de  $x$  que  $c_n$ , alors son dénominateur est plus grand.

Ainsi,  $c_n$  est le rationnel le plus proche de  $x$  parmi tous les rationnels dont le dénominateur est inférieur à  $q_n$

## Partie IV : Applications

22. Une approximation de  $\pi$  par un rationnel :

Calculer  $p_1$  et  $q_1$  lorsque  $x = \pi$ .

En déduire un rationnel proche de  $\pi$

23. Montrer pourquoi les pianos ont douze notes par octave. ( blague, on verra à la correction )