

Résumé Suites géométriques et séries

2 définitions : pour une suite géométrique :

- [1] $u_{n+1} = a u_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- [2] $u_n = \text{cte} \cdot a^n, \forall n \in \mathbb{N}$

a s'appelle la raison de la suite

Somme partielle : $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \sum_{k=0}^n r^k = \begin{cases} \frac{r-1}{r-1} & \text{qd } r \neq 1 \\ n+1 & \text{qd } r = 1 \end{cases}$

Somme (complète) : $1 + r + \dots + r^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ qd $r \in]-1; 1[$
 (DIV qd $r \notin]-1; 1[$)

Un bon truc : Pour calculer $r^p + r^{p+1} + \dots + r^q$, on commence par mettre r^p en facteur

exemple : Calcul de $\cos(3x) + \cos(4x) + \cos(5x) + \cos(6x) + \cos(7x) = A(x)$
 pour $x \neq \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \operatorname{Re}(e^{i3x} + e^{i4x} + \dots + e^{i7x}) \\
 &= \operatorname{Re}(e^{i3x} [1 + e^{ix} + e^{i2x} + \dots + e^{i4x}]) = \operatorname{Re}(e^{i3x} [1 + e^{ix} + (e^{ix})^2 + (e^{ix})^3 + (e^{ix})^4]) \\
 &= \operatorname{Re}\left(e^{i3x} \left(\frac{e^{i5x} - 1}{e^{ix} - 1}\right)\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i3x} \frac{e^{i5x} - 1}{e^{ix} - 1}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i3x} \frac{e^{i\frac{5}{2}x} (e^{i\frac{5}{2}x} - e^{-i\frac{5}{2}x})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})}\right) \\
 &= \operatorname{Re} e^{i3x} e^{i\frac{5}{2}x} \frac{2i \sin(\frac{5}{2}x)}{2i \sin(\frac{x}{2})} = \operatorname{Re} e^{i\frac{11}{2}x} \frac{\sin(\frac{5}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \cos 5x \cdot \frac{\sin(\frac{5}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}
 \end{aligned}$$