

Exercice 2

1. Comme $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, e^{2ix} est différent de 1, donc :

$$T_n(x) = \frac{1 - e^{2i(n+1)x}}{1 - e^{2ix}}.$$

En factorisant haut et bas par l'angle moitié, et en utilisant la formule d'Euler pour le sinus, on a :

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{e^{i(n+1)x} (e^{-i(n+1)x} - e^{i(n+1)x})}{e^{ix} (e^{-ix} - e^{ix})} \\ &= e^{inx} \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$\operatorname{Re}(T_n(x)) = \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin(x)}.$$

2. (a) Grâce au résultat de la question 1 et à la deuxième formule du rappel de l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= 2 \cos(nx) \frac{\sin[(n+1)x]}{\sin(x)} - 1 \\ &= \frac{\sin[(2n+1)x] + \sin(x)}{\sin(x)} - 1 \\ &= \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

Directement à partir de la définition de $T_n(x)$, on a : $\operatorname{Re}(T_n(x)) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx) = 1 + \sum_{k=1}^n \cos(2kx)$.

Donc :

$$S_n(x) = 2 \left[1 + \sum_{k=1}^n \cos(2kx) \right] - 1 = 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kx) + 1.$$

- (b) Remarquons que S_n est une série de Fourier, où le coefficient constant vaut 1, les a_k (pour $k \in \{1, \dots, n\}$) valent 2, et tous les autres coefficients a_k ainsi que tous les b_k sont nuls. L'intégrale I_n correspond au coefficient constant de la série de Fourier, qui vaut 1, donc :

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi S_n(x) dx = 1.$$

Pour calculer J_n on utilise le théorème de Parseval :

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (S_n(x))^2 dx = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^2 = 1 + 2n.$$

3. (a) On se ramène à une limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\ln(x))^2 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{y}} \left(\ln\left(\frac{1}{y}\right) \right)^2 = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(-\ln(y))^2}{\sqrt{y}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(y))^2}{\sqrt{y}} = 0,$$

grâce aux croissances comparées de la racine et du logarithme en $+\infty$. On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, sur l'intervalle $]0; \varepsilon[$, $0 < \sqrt{x} (\ln(x))^2 < 1$, donc : $0 < (\ln(x))^2 < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Par comparaison,

comme l'intégrale $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ est une intégrale de Riemann convergente, on en déduit que l'intégrale $\int_0^\varepsilon (\ln(x))^2 dx$ aussi, puis donc que $\int_0^1 (\ln(x))^2 dx$ est convergente.