

Noyaux et Image de :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto 2x - y$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x + 3y, 2x + 6y)$$

$$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x + 2y + 2z, -y + z)$$

Pour g et h , on donnera une eq cartésienne de l'image

• $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2x - y = 0$

$\boxed{\text{Ker } f \text{ est la droite d'eq } y = 2x}$ $\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow \dim(\text{Im } f) = 1$

$\text{Im } f \text{ est un sev de } \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\text{Im } f = \mathbb{R}}$

• $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3y = 0$

$\boxed{\text{Ker } g \text{ est la droite d'eq } x + 3y = 0}$ $\boxed{\text{Ker } g = \text{Vect} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}$

∇ ds dimensions $\Rightarrow \dim(\text{Im } g) = 2 - 1 = 1$

$g(1, 0) = (1, 2)$. Donc $\boxed{\text{Im } g = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

d'eq cartésienne $\boxed{y = 2x}$

$$\bullet h(x, y, z) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \text{ dim } 1$$

donc $y=1$: $z=1$ et $x=-2$ / $\boxed{\text{Ker } h = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

$$\nabla \text{ le rang} \Rightarrow \text{dim}(\text{Im } h) = 3 - 1 = 2$$

$$h(\vec{a}) = (1, 2, 0) \text{ et } h(\vec{b}) = (1, 2, -1) \quad (\vec{a} = (1, 0, 0) \text{ et } \vec{b} = (0, 1, 0))$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

\vec{c} est \perp au plan $\mathcal{P} = \text{Im}(h)$, donc \mathcal{P} a pour équation $-2x + y + 0z = 0$

Donc encore $\boxed{y = 2x}$ est l'éq du plan $\text{Im}(h)$!