

Exemples concrets 1

ATS 2019

$$\begin{aligned} \triangleleft \vec{u} \mid = a\vec{u} &\Rightarrow p(\vec{u}) = \frac{1}{2}(\text{id}(\vec{u}) - s(\vec{u})) = \frac{1}{2}(\vec{u} - a\vec{u}) \\ &= \frac{1-a}{2}\vec{u} \end{aligned}$$

donc \vec{u} est un vecteur propre de p associé à la valeur propre $\frac{1-a}{2}$

Exo perso :

\vec{u} est un vecteur propre de f associé à la valeur propre a
donc

$$f(\vec{u}) = a\vec{u}$$

$$\triangleleft g(\vec{u}) = f \circ f(\vec{u}) = f(f(\vec{u})) = f(a\vec{u}) = a f(\vec{u}) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ = a \cdot a\vec{u} = a^2\vec{u}$$

Donc \vec{u} est un vecteur propre de $g = f \circ f$ associé à la valeur propre a^2

ATS 2017. $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \alpha \text{I} + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha + \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = b \text{ et } \alpha = a - b$$

$$A = (a-b)\text{I} + bB$$

$B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 0

On appelle f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de \mathbb{R}^3
et g $\underline{\hspace{10em}}$ B $\underline{\hspace{10em}}$

$$f = (a-b)\text{id}_{\mathbb{R}^3} + bg$$

$$\begin{aligned} f(\vec{v}) &= (a-b)\text{id}(\vec{v}) + bg(\vec{v}) = (a-b)\vec{v} + bc\vec{v} \\ &= (a-b+bc)\vec{v} \end{aligned}$$

Donc

\vec{v} est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $a-b+bc$