

Compte

ATS 2018 : $\mathcal{E} = \{A_{a,b} \text{ où } (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1^{ère} méthode : $\mathcal{E} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \right\}$

donc $\mathcal{E} = \text{Vect}(\mathcal{I}, C)$. donc \mathcal{E} est un ser de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2^{ème} méthode : On montre que \mathcal{E} contient 0 , est stable pour $+$ et.

* $A_{(0,0)} = 0 \in \mathcal{E}$

* $A_{a,b} + A_{a',b'} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' & b' \\ b' & a' & b' \\ b' & b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' & b+b' \\ b+b' & a+a' & b+b' \\ b+b' & b+b' & a+a' \end{pmatrix} = A_{a+a', b+b'}$

La somme de 2 matrices de \mathcal{E} est encore dans \mathcal{E} , donc \mathcal{E} est stable pour $+$

* $c A_{a,b} = \begin{pmatrix} ca & cb & cb \\ cb & ca & cb \\ cb & cb & ca \end{pmatrix} = A_{ca, cb}$

\mathcal{E} est stable pour \cdot

donc \mathcal{E} est un ser de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

* $A_{a,b} = (a-b)\mathcal{I} + bB$

donc $\mathcal{E} = \{ (a-b)\mathcal{I} + bB \text{ où } a, b \in \mathbb{R} \}$

$= \{ c\mathcal{I} + bB \text{ où } c, b \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(\mathcal{I}, B)$

donc (\mathcal{I}, B) est une famille génératrice de \mathcal{E}

Si $\alpha\mathcal{I} + \beta B = 0$, alors $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. donc (\mathcal{I}, B) est une famille liée

Donc (\mathcal{I}, B) est une base de \mathcal{E} ($\dim(\mathcal{E}) = 2$)