

Comptes

ATS 2016. La suite nulle est dans U ($0 = 0 + 2 \times 0$)

• Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de U , alors

posons $w = u + v$

$$\begin{aligned}w_{n+2} &= u_{n+2} + v_{n+2} = (u_{n+1} + 2u_n) + (v_{n+1} + 2v_n) \\ &= u_{n+1} + v_{n+1} + 2(u_n + v_n) \\ &= w_{n+1} + 2w_n \quad \text{donc } w \in U\end{aligned}$$

donc U est stable pour $+$

• Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in U$, et $a \in \mathbb{R}$, alors

posons $w = au$

$$\begin{aligned}w_{n+2} &= au_{n+2} = a(u_{n+1} + 2u_n) = au_{n+1} + 2au_n \\ &= w_{n+1} + 2w_n \quad \text{donc } w \in U\end{aligned}$$

donc U est stable pour \cdot . Donc U est un sev de l'ensemble des suites réelles

• Montrons que $U = \text{Vect}(c, d)$.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in U$. Montrons que $u = u_0 c + u_1 d$

On appelle $w = u_0 c + u_1 d$

$$w_0 = u_0 c_0 + u_1 d_0 = u_0 \cdot 1 + u_1 \cdot 0 = u_0$$

$$w_1 = u_0 c_1 + u_1 d_1 = u_0 \cdot 0 + u_1 \cdot 1 = u_1$$

$$w_2 = w_1 + 2w_0 = u_1 + 2u_0 = u_2 \quad \text{--- et } w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n = u_{n+1} + 2u_n = u_{n+2} \quad (\text{récurrence})$$

donc $w = u$

Ainsi, Toute suite u de U s'écrit comme une combinaison linéaire de c et d

cà d

$$U = \text{Vect}(c, d)$$

• Montrons que (c, d) est une famille libre :

Si $ac + bd = 0$, alors pour $n=0$: $ac_0 + bd_0 = 0 \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = 0$

et pour $n=1$: $ac_1 + bd_1 = 0 \Rightarrow a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0 \Rightarrow b = 0$

donc (c, d) est libre

(c, d) est libre et génératrice,

donc c'est une base de U

$$\dim(U) = 2$$