

ATS 2013 (3) $\begin{cases} x(t) = 3 \cos^2 t \\ y(t) = 3 \sin^2 t \end{cases}$ $\begin{cases} x(t) = 3 \cos^2 t \\ y(t) = 3 \sin^2 t \end{cases}$

Un vecteur tangent est $\vec{T} = \begin{pmatrix} -3 \cos^2 t \\ 3 \sin^2 t \end{pmatrix} = 3 \cos^2 t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = 3 \cos^2 t \vec{T} \cdot \text{OK}$

Un vecteur $\perp \vec{T}$ à \vec{T} est $\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

La droite T à E en $M(t)$ a pour eq: $\sin x + \cos y = c$

En $M(t)$: $\sin \cos^2 t + \cos \sin^2 t = c = \sin \cos [\cos^2 t + \sin^2 t] = \sin \cos$

Ainsi, T a pour eq cartésienne: $\boxed{\sin x + \cos y = \sin \cos}$

- (4) Qd $y=0$: $x = \cos$. On est sur l'axe (x, x) $A(t) = (\cos, 0)$
 Qd $x=0$: $y = \sin$ $B(t) = (0, \sin)$ $\vec{AB} = (-\cos, \sin)$ $AB = \|\vec{AB}\| = 1$

ATS 2012 (1) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$ $x = y^2$. C'est une parabole
 (2) $\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 1 \end{cases}$, donc $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}$

(3) \vec{N} est \perp à T_A , donc T_A a pour eq $x - 2ay = c$
 en $A(a^2, a)$: $a^2 - 2a^2 = c = -a^2$ $\boxed{T_A: x - 2ay = -a^2}$

Intersection avec (Ox) : $y = 0 \Rightarrow x = -a^2$ $A' = (-a^2, 0)$

$\boxed{T_B: x - 2by = -b^2}$ $B' = (-b^2, 0)$

(4) $I = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{a^2+b^2}{2}, \frac{a+b}{2} \right)$

(5) $\begin{cases} x_M - 2ay_M = -a^2 \\ x_M - 2by_M = -b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a-2b)y_M = a^2 - b^2 \\ (2a-2b)y_M = a^2 - b^2 \end{cases} \Rightarrow y_M = \frac{a^2 - b^2}{2(a-b)} = \frac{(a+b)(a-b)}{2(a-b)} = \frac{a+b}{2}$
 et $x_M = 2ay_M - a^2 = 2a \frac{a+b}{2} - a^2 = ab$ $\boxed{M = (ab; \frac{a+b}{2})}$

(6) $y_I = y_M = \frac{a+b}{2}$

(7) $y_C = \frac{a+b}{2} \Rightarrow x_C = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$ $\boxed{C = \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2, \frac{a+b}{2} \right)}$

(8) $T_C: x - 2 \left(\frac{a+b}{2} \right) y = - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \Leftrightarrow x - (a+b)y = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$ T_C

Un vecteur directeur de T_C est: $\vec{u} = (a+b; 1)$

et $\vec{AB} = (b^2, b) - (a^2, a) = (b^2 - a^2; b - a) = (b-a)(b+a; 1)$

$\vec{AB} = (b-a)\vec{u}$. \vec{AB} et \vec{u} sont colinéaires, donc

$\boxed{\text{La droite } (AB) \text{ est } \parallel \text{ à } T_C}$

ATS 2015. En paramétrisant la parabole \mathcal{P} d'éq $y = x^2$ a pour eq $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

Un vecteur tangent à \mathcal{P} en $A(a, a^2)$ est donc $\vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2t \end{cases}$

\vec{T} est \perp à \mathcal{D} , donc \mathcal{D} a pour eq $x + 2ay = c$
 en A : $a + 2a^3 = c$ $\mathcal{D}: x + 2ay = a + 2a^3$

Vérifions que Avec $b = -a - \frac{1}{2a}$, le point $B(b, b^2)$ est sur \mathcal{D} et \mathcal{P} .
 B est sur \mathcal{P} car $y_B = x_B^2$. Dans l'éq de \mathcal{D} : $x_B + 2ay_B = -a - \frac{1}{2a} + 2a\left(-a - \frac{1}{2a}\right)^2$
 $= -a - \frac{1}{2a} + 2a\left(a^2 + 1 + \frac{1}{4a^2}\right) = -a - \frac{1}{2a} + 2a^3 + 2a + \frac{1}{2a} = a + 2a^3$. CQFD

ATS 2014 $\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos \alpha \end{cases}$ $\begin{cases} x'(\alpha) = 1 - \cos \alpha \\ y'(\alpha) = \sin \alpha \end{cases}$

Un vecteur tangent \vec{T} en $M(\alpha)$ est $\vec{T} = \begin{pmatrix} 1 - \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$

Un vecteur normal $\vec{n} \in E$ en $M(\alpha)$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha - 1 \end{pmatrix}$

La normale $N \in E$ en $M(\alpha)$ a pour eq $(1 - \cos \alpha)x + \sin \alpha y = c$ car $\vec{T} \perp N$
 en $M(\alpha)$: $(1 - \cos \alpha)(\alpha - \sin \alpha) + \sin \alpha(1 - \cos \alpha) = c$
 $\alpha - \alpha \cos \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = c$

$N: (1 - \cos \alpha)x + \sin \alpha y = \alpha - \alpha \cos \alpha$

Sur l'axe (Ox) : $y = 0$ donc $x = \frac{\alpha - \alpha \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ $x = \alpha$ $L = (\alpha, 0)$

La tige $T \in E$ en M a pour eq: $\sin \alpha x + (\cos \alpha - 1)y = c$ car $\vec{n} \perp T$
 en $M(\alpha)$: $\sin \alpha(\alpha - \sin \alpha) + (\cos \alpha - 1)(1 - \cos \alpha) = c$
 $\alpha \sin \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos \alpha + \cos \alpha - 1 = c$

$c = \alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha - 2$ $T: \sin \alpha x + (\cos \alpha - 1)y = \alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha - 2$

Si $y = 2$: $\sin \alpha x + 2 \cos \alpha - 2 = \alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha - 2 \Rightarrow x = \alpha$

$V = (\alpha, 2)$