

# Intégrals Généralisés

def:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  CV  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx$  existe et est finie

$\int_a^b f(x) dx$  CV  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(x) dx$  existe et est finie  
 pb en a quand f devient infini en a (on commence donc par diagnostiquer les différents problèmes)

Intégrals de Riemann:  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$  CV  $\Leftrightarrow a > 1$

$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$  CV  $\Leftrightarrow a < 1$   
 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$  CV  $\Leftrightarrow \alpha < 1$   
 (change de variable  $x = x-a$ )

↳ de comparaison:

Si  $0 \leq f \leq g$  alors

$\int g$  CV  $\Rightarrow \int f$  CV  
 $\int f$  D.V.  $\Rightarrow \int g$  D.V.

↳ ds équivalents

Si  $0 < f \sim g$  alors  $\int f$  et  $\int g$  ont m même nature

CVA  $\Rightarrow$  CV (on dit que  $\int f$  CVA lorsque  $\int |f|$  CV)

Critère de Riemann: (H.D.)

Si  $a > 1$  Alors  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  CV  
 si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a f(x) = 0$

$\exists x^a f(x) \leq 1$  pour  $x \geq A$ , donc  $\forall x \geq A$   $f(x) \leq \frac{1}{x^a}$

$\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx$  CV (Riemann car  $a > 1$ )  $\Rightarrow \int_A^{+\infty} f(x) dx$  CV (↳ de comparaison)

exemple:  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$  ;  $\int_0^{+\infty} \frac{37-x}{x} e^{-x} dx$

$$\Gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

---

avec le critère de Riemann

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0 \quad (\text{T des croissances comparées})$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ CV} \quad (2 > 1)$$

Parait avec les séries

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-n^2} = 0 \quad (\text{TCC})$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-n^2} \text{ CV}$$

Dans les règles de l'aut :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0, \text{ donc, pour } x \text{ assez grand } (x \geq A):$$

$$0 \leq x^2 e^{-x^2} \leq 1$$

$$\text{donc } \forall x \geq A, 0 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ CV, donc } \int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ CV} \quad (\text{T de comparaison})$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \text{ CV}$$

$$\Gamma \circ \int_0^{+\infty} x^{37} e^{-x} dx$$

Avec le critère de Riemann :

$$x^2 \cdot x^{37-x} e^{-x} = x^{39-x} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \text{ donc } \int_0^{+\infty} x^{37} e^{-x} dx \text{ CV}$$

Sans

$$x^2 \cdot x^{37-x} e^{-x} = x^{39-x} e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, il existe  $A > 0$ , tel que  $\forall x \geq A \quad x^2 \cdot x^{37-x} e^{-x} \leq 1$

$$\Rightarrow \forall x \geq A \quad 0 \leq x^{37-x} e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ CV (Riemann)}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} x^{37-x} e^{-x} dx \text{ CV (}\forall \text{ de comparaison)}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{37-x} e^{-x} dx \text{ CV}$$