

Pour:  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$

Avec le critère de Riemann:  $x^2 \cdot \frac{\ln x}{x^3} = \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (TCC), donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$

Sans le critère de Riemann:  $x^2 \cdot \frac{\ln x}{x^3} = \frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (TCC)

donc, il existe  $A > 0$ , tel que  $\forall x \geq A \quad 0 \leq x^2 \cdot \frac{\ln x}{x^3} \leq 1$

$\Rightarrow \forall x \geq A \quad \frac{\ln x}{x^3} \leq \frac{1}{x^2}$

$\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  CV (Riemann)  $\Rightarrow \int_A^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$  CV (T de comparaison)

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$  CV

$J = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

Avec:  $x^{1.5} \cdot \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x^{0.5}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (TCC), donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$  CV (critère de Riemann)

$K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx$  avec  $a > 0$

Avec: Si  $a > 1$ , alors  $1 < \frac{a+1}{2} < a$

$\uparrow$  milieu

$x^{\frac{a+1}{2}} \cdot \frac{\ln x}{x^a} = \frac{\ln x}{x^{\frac{a-1}{2}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  (TCC avec  $\frac{a-1}{2} > 0$ )

Donc  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx$  CV (critère de Riemann)

Si  $a \leq 1$ :  $\frac{\ln x}{x^a} \geq \frac{\ln x}{x} \geq \frac{1}{x} \quad \forall x \geq e$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  DIV (Riemann)  $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx$  DIV

(T de comparaison)

Résumé:  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx$  CV qd  $a > 1$   
 DIV qd  $a \leq 1$