

Fonctions de plusieurs variables

I Dérivées partielles

Def: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f'(x,b)$ (a) (on fixe $y=b$, on dérive, on prend alors la valeur en a.)

exemple 1: Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ avec $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} (\sin(xy)) = \frac{1}{y} \cos(xy) \cdot y = \cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x \cos(xy) \cdot y - \sin(xy)}{y^2}$$

ex 2 Idem avec $f(x,y) = \sin(x+2y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+2y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+2y) \cdot 2$$

ex 3 Idem avec $f(x,y) = g(x+2y)$ où g va de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x+2y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g'(x+2y) \cdot 2$$

II Schwarz: Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

III Taylor ordre 2: Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 au voisinage de (a,b) alors

$$f(x,y) = f(a,b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \frac{1}{2} \left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \right]$$

+ possible

$$z = f(a,b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \text{ est l'éq du plan tangent } \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

[...] donne la position du plan tangent. On cherche d'abord (x,y) tels que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

IV Extrema: $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$ $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$ $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$

$\Delta = r^2 - 4st$ 1^{er} cas: $\Delta > 0$ [...] change de signe. (C'est un col)

2^e cas: $\Delta < 0$ [...] est du signe de r (out)

si $r > 0$
si $r < 0$

c'est un minimum
c'est un maximum