

④ DL et DSE de arctan x :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$|x| \in]-1; 1[$ (Rayon 1)

Donc, en intégrant :

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + cste$$

valen en 0 :

$$0 = 0 + cste \Rightarrow cste = 0$$

Donc

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\text{Rayon 1})$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

Donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ (Rayon 1)
 $\forall x \in]-1; 1[$

Donc f est de classe C^∞ sur $]-1; 1[$

Comme f est de classe C^∞ pour $x \neq 0$ (comme quotient (dén $\neq 0$) de fonctions de classe C^∞), f est C^∞ sur \mathbb{R}

Avec Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \Rightarrow f(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cdot (2n)!$

voir page 5