

Part 2: (1) Continuité

• Pour $x \neq 0$, f est continue comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

• Pour $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 = f(0)$

Donc f est continue aussi en 0

• Conclusion: f est continue sur \mathbb{R}

(2) Dérivabilité

• Pour $x \neq 0$, f est dérivable comme ... et $f'(x) = \frac{1-x - a \cos x}{x^2}$

• Pour $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a \cos x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos x - x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} - x + a x^3}{x^2} = \dots = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

et si $x \neq 0$ $f'(x) = \frac{x - (1+x^2) a \cos x}{x^2(1+x^2)}$

f est donc dérivable sur \mathbb{R}

(3) Classe C^1 . Avec (2) on sait déjà que f est dérivable

Montrons que f' est continue:

• Pour $x \neq 0$: f' est continue comme somme, produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues.

• Pour $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2) a \cos x}{x^2(1+x^2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x - x^3 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x + o(x)}{1+x^2} = \frac{0}{1} = 0 = f'(0)$$

Donc f' est continue aussi en 0. f' est de classe C^1 sur \mathbb{R} .