

Part 2: (1) Continuité

• Pour $x \neq 0$, f est continue comme produit (de la fonction de dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

• Pour $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 = f(0)$

Donc f est continue aussi en 0

• Conclusion: f est continue sur \mathbb{R}

(2) Dérivabilité

• Pour $x \neq 0$, f est dérivable comme ... et $f'(x) = \frac{1 - \arctan^2 x}{x^2}$

• Pour $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} - x + \arctan x}{x^2} = \dots = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

et si $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}$$

f est donc dérivable sur \mathbb{R}