

Part 2: ① Continuité

• Pour $x \neq 0$, f est continue comme produit (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

• Pour $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2 = f(0)$

Donc f est continue aussi en 0

• Conclusion: f est continue sur \mathbb{R}

② Dérivabilité

• Pour $x \neq 0$,

Part 2: (1) Continuité

• Pour $x \neq 0$, f est continue comme produit (de la dérivée qui ne s'annule pas) de fonctions continues

• Pour $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 = f(0)$

Donc f est continue aussi en 0

• Conclusion: f est continue sur \mathbb{R}

(2) Dérivabilité

• Pour $x \neq 0$, f est dérivable comme ... et $f'(x) = \frac{1-x - \arctan x}{x^2}$

• Pour $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} - x + \arctan x}{x^2} = \dots = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

et si $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}$$

f est donc dérivable sur \mathbb{R}

Part 2: (1) Continuité

• Pour $x \neq 0$, f est continue comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

• Pour $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 = f(0)$

Donc f est continue aussi en 0

• Conclusion: f est continue sur \mathbb{R}

(2) Dérivabilité

• Pour $x \neq 0$, f est dérivable comme ... et $f'(x) = \frac{1 - x - ae^{ax}}{x^2}$

• Pour $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - x - 1}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3} - x + ax^3}{x^2} = \dots = 0$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

et si $x \neq 0$ $f'(x) = \frac{x - (1+x^2)ae^{ax}}{x^2(1+x^2)}$

f est donc dérivable sur \mathbb{R}

(3) Classe C^1 . Avec (2) on sait déjà que f est dérivable

Montrons que f' est continue:

• Pour $x \neq 0$: f' est continue comme somme, produit et quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues.

• Pour $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x^2)ae^{ax}}{x^2(1+x^2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x - x^3 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{3}x + o(x)}{1+x^2} = \frac{0}{1} = 0 = f'(0)$$

Donc f' est continue aussi en 0. f' est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

④ DL et DSE de arctan x :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$|x| \in]-1; 1[$ (Rayon 1)

Donc, en intégrant :

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + cste$$

valen en 0 :

$$0 = 0 + cste \Rightarrow cste = 0$$

Donc

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\text{Rayon 1})$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

Donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ (Rayon 1)

$\forall x \in]-1; 1[$

Donc f est de classe C^∞ sur $]-1; 1[$

Comme f est de classe C^∞ pour $x \neq 0$ (comme quotient (dén $\neq 0$) de fonctions de classe C^∞), f est C^∞ sur \mathbb{R}

Avec Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \Rightarrow f(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cdot (2n)!$

voir page 5

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

et

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

↳ n pairs

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

↳ impairs

$$= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

+

$$0$$

Donc

$$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

et

$$f^{(2n+1)}(0) = 0$$

$$f^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2n+1}$$