

Perso 1: $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{qd } x \neq 0 \\ 1 & \text{qd } x = 0 \end{cases}$

① Continuité de f sur \mathbb{R} :

• sur \mathbb{R}^* , f est continue comme quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues

• pour $x=0$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + o(1)) = 1 = \underline{f(0)}$

donc f est continue en 0

• Conclusion: f est continue sur \mathbb{R}

② Dérivabilité

• sur \mathbb{R}^* , f est dérivable comme quotient (...) de fonctions dérivables

• Pb en 0: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = 0$

Cette limite existe et est finie, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

• Conclusion: f est dérivable sur \mathbb{R} et

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & \text{qd } x \neq 0 \\ 0 & \text{qd } x = 0 \end{cases}$$

③ Classe C^1

• Pour $x \neq 0$ f est de classe C^1 comme quotient (...) de fonctions de classe C^1

• Pb en 0 On doit montrer que f est dérivable en 0

et que f' est continue en 0:

• dérivabilité en 0: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 = 0$ $f'(0) = 0$

• continuité de f' en 0: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0(x) - 0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0(x) = 0 = \underline{f'(0)}$

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0(x)}{x^2} = 0 = \underline{f'(0)}$
Donc f' est continue en 0

Conclusion: f est de classe C^1 sur \mathbb{R}

④ Classe C^2

- Sur $x \neq 0$ f est de classe C^2 comme produit (...) de f de classe C^2
- Pb en 0: avec ② et ③: $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ pd $x \neq 0$
0 qd $x = 0$

$$f''(x) = \frac{(-x \sin x + \cos x - \cos x)x^2 - 2x(x \cos x - \sin x)}{x^4} \quad \text{pour } x \neq 0$$
$$= \frac{2 \sin x - 2x \cos x - x^2 \sin x}{x^3}$$

$$= \frac{2(x - \frac{x^3}{6}) - 2x(1 - \frac{x^2}{2}) - x^2(x) + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}x^3 + x^3 - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = -\frac{1}{3}$

Calculons maintenant $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \frac{x^2}{2}) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-3x^3}{6} + \frac{x^3}{6} \right) / x^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \boxed{f''(0) = -\frac{1}{3}}$$

Donc f' est continue en 0.

f est de classe C^2 sur \mathbb{R}

⑤ On montre que $f(x)$ est développable en série entière dans le rayon ∞ .

C'est le cas de $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Donc

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = f(x)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

$f(0) = 1$ ok

trier, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

Le rayon de cette série est le ∞ pour $\sin x$, c'est ∞ .

donc f est de classe C^{∞} sur \mathbb{R}

Rq: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, donc

$$f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{(2n+1)!} (-1)^n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \forall n$$

et

$$f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad \forall n$$

(par ex: $f'(0) = \frac{1}{1}$)

$$f^{(2n+1)}(0) = 0, \quad \forall n$$