

Exo 1: $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$ est un sev de E ($f \in \mathcal{L}(E, F)$)

Exo 2: $\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$ $\text{Im}(f) \subset E$ ($\text{Im}(f) \subset E$)

Exo 3: $f \in \mathcal{L}(E, F)$ $\dim(E) = n$ $\dim(\text{Ker}(f)) = p$ $\dim(\text{Im}(f)) = q$

$B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p)$ est une base de $\text{Ker}(f)$

$B' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_q)$ est une base de $\text{Im}(f)$

On appelle \vec{a}_i un antécédent de \vec{e}'_i : (càd $f(\vec{a}_i) = \vec{e}'_i$)

Montrer que la famille $\mathcal{A} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_q\}$ est li br

Exo 4: Avec les m notations que dans l'exo 3

On prend un vecteur $\vec{u} \in E$. On décompose $f(\vec{u})$ dans la base B' :

$$f(\vec{u}) = \alpha_1 \vec{e}'_1 + \dots + \alpha_q \vec{e}'_q$$

On prend un ~~se~~ appelle $\vec{v} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_q \vec{a}_q$

[41] Montrer que $\vec{u} - \vec{v} \in \text{Ker}(f)$

[42] On décompose $\vec{u} - \vec{v}$ dans la base B : $\vec{u} - \vec{v} = \beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_p \vec{e}_p$

En écrivant $\vec{u} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{v}$, montrer que la famille $\mathcal{A} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_q)$ est génératrice de E

[43] Conclure

Exo 5: $f \in \mathcal{L}(E)$: $\forall f$ que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ f)$

Exo 6: $f \in \mathcal{L}(E)$: $\forall f$ que $\text{Im}(f \circ f) \subset \text{Im}(f)$

Exo 5': $f \in \mathcal{L}(F, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$
 $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f \circ g)$

Exo 6': $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$

Exo 7: $f \in \mathcal{L}(F, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$ (E, F)

[71] $\forall f, g$ Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective

[72] $\forall f, g$ " $f \circ g$ est injective " \Leftrightarrow " g est injective et $\text{Im}(g) \cap \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ "

[73] $\forall f, g$ " $f \circ g$ est surjective " \Leftrightarrow " f est surjective et $\text{Im}(g) + \text{Ker}(f) = F$ "

Exo 8: $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifie $f \circ f = f$. On note $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{x}) = \vec{0}\}$ et $F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{x}) = \vec{x}\}$. Calculer $E \cap F$

• Montrer que E et F sont des sev de \mathbb{R}^3

• Vérifier que $\vec{x} - f(\vec{x}) \in E$ et que $f(\vec{x}) \in F$. • En déduire que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$. Construire une telle application

Exo 9: $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ vérifie $f \circ f = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$. On note $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$ et $F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{x}) = \vec{x}\}$

• Montrer que E et F sont des sev de \mathbb{R}^2 . Calculer $E \cap F$

• Vérifier que $\vec{x} - f(\vec{x}) \in E$ et $\vec{x} + f(\vec{x}) \in F$. En déduire que $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$. Construire une telle application

Exo 10: $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tq $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$

(Indicateur: $\vec{x} = \vec{x} - g \circ f(\vec{x}) + g \circ f(\vec{x})$)