



Épreuve écrite de Mathématiques

Voie ATS-DUT Ingénierie Electrique

2 heures

Les documents et appareils électroniques sont interdits.

La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.

Chaque affirmation doit être justifiée par une démonstration. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Pour tout n un entier positif ou nul, on note

$$I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx.$$

Soit n un entier positif ou nul.

Q. 1.1 Justifier l'existence de I_n .

Q. 1.2 Calculer $I_n + I_{n+2}$.

Q. 1.3 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Q. 1.4 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi/4} \cos(2x)(\tan(x))^n dx = \frac{1}{2} - nI_n.$$

Q. 1.5 En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On définit l'application $N(f) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

Q. 2.1 Justifier le fait que $N(g)$ est finie pour toute fonction g continue sur $[0, 1]$.

Q. 2.2 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} . On suppose que $N(f_n - f)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

Q. 2.3 Donner un exemple de suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0, 1]$ qui est telle que pour tout $x \in [0, 1]$ $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ et f n'est pas continue sur $[0, 1]$.

Q. 2.4 Soit h une fonction continue, dérivable et de dérivée continue sur $[0, 1]$. Justifier que pour tous $x, y \in [0, 1]$, $h(x) - h(y) = \int_y^x h'(t) dt$.

Q. 2.5 Soient $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues, dérivables et de dérivée continue sur $[0, 1]$ telle que $|f'_n(t)| \leq g(t)$ pour tout n et tout $t \in [0, 1]$. On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est telle que pour tout $x \in [0, 1]$ $f_n(x)$ converge vers $f(x)$.
Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 3

Soient a, b, c 3 réels tels que $a \neq b$. Soit le système suivant d'inconnues u, v, x, y

$$\begin{cases} u + av + x + by = 1 \\ au + a^2v + bx + b^2y = c \\ a^2u + a^3v + b^2x + b^3y = c^2. \end{cases} \quad (\text{S})$$

Montrer que l'ensemble des solutions est non vide si et seulement si $c \in \{a, b\}$.

Exercice 4

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \pi/6} (2 \sin(x))^{\tan(3x)}.$$