



Épreuve écrite de Mathématiques Admission voie DUT

2 heures

Les documents et appareils électroniques sont interdits.

La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.

Chaque affirmation doit être justifiée par une démonstration. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Q. 1.1 Soit n un entier positif. Justifier l'existence de l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2n}}{e^{x^2}} dx.$$

Q. 1.2 Calculer la valeur de l'intégrale I_0 .

Q. 1.3 Calculer la valeur de l'intégrale I_1 .

Exercice 2

Pour $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, pour n un entier positif, on note $\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

On définit $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q. 2.1 Pour tout $x \in [0, 1]$, calculer la limite de $\sum_{k=0}^n f_k(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On notera cette limite $\varphi(x)$.

Q. 2.2 La fonction f obtenue est-elle continue sur $[0, 1]$?

Soient $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $[0, 1]$ et qui satisfait à la propriété : il existe un réel positif M tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \max_{x \in [0, 1]} |g_k(x)| \leq M.$$

Q. 2.3 Soit n un entier positif. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^n g_k(x)$ est définie pour tout $x \in [0, 1]$ et continue sur $[0, 1]$.

Q. 2.4 Montrer que la fonction $x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n g_k(x)$ est définie pour tout $x \in [0, 1]$. On la notera σ .

On admettra que σ est continue sur $[0, 1]$.

Q. 2.5 Montrer que la fonction φ obtenue en Q. 2.1 est continue sur $[0, a]$, si $0 < a < 1$.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier positif.

Q. 3.1 Etudier l'indépendance linéaire :

1. des vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. de la famille de fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i : x \mapsto |x - a_i|$, a_1, \dots, a_n étant des réels distincts.

Soient a, b, c trois nombres complexes. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Q. 3.2 Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que A soit inversible.

Q. 3.3 Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que A soit diagonalisable.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

Q. 4.1

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3^x + 4^x - 6^x)^{\tan(\pi x/2)}$$

Q. 4.2

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4, x < \pi/4} (\tan(x))^{\tan(2x)}$$