



## Épreuve écrite de Mathématiques

### Admission voie DUT

2 heures

**Les documents et appareils électroniques sont interdits.**

*La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.*

*Chaque affirmation doit être justifiée par une démonstration. Les 5 exercices sont indépendants.*

#### Exercice 1

**Q. 1.1** Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

**Q. 1.2** Calculer la valeur de l'intégrale  $I$ .

#### Exercice 2

On définit  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q. 2.1** Pour tout  $x \in [0, 1]$ , calculer la limite de  $f_n(x)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . On notera cette limite  $f(x)$ .

**Q. 2.2** La fonction  $f$  obtenue est-elle continue sur  $[0, 1]$  ?

Soient  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur  $[0, 1]$  et  $g$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $[0, 1]$  et qui satisfont à la propriété : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $N_\varepsilon$  tel que, pour tout  $n$  plus grand que  $N_\varepsilon$ ,

$$\max_{x \in [0, 1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

**Q. 2.3** Montrer que la fonction  $g$  est continue.

**Q. 2.4** Montrer que la fonction  $f$  obtenue en Q. 2.1 est continue sur  $[0, a]$ , si  $0 < a < 1$ .

### Exercice 3

**Q. 3.1** Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.  $f_n : x \mapsto (\sin(x))^n, n \in \{1, 2, 3\}$

3.  $(x \mapsto (\sin(x))^n), (x \mapsto (\cos(x))^n), n \in \{1, \dots, 4\}$ .

**Q. 3.2** Soit  $f_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, i \in \{1, 2, 3\}$  une famille de fonctions. On pose

$$A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq 3}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction déterminant de A,  $\det(A)$ , pour que la famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq 3}$  soit libre.

### Exercice 4

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

**Q. 4.1** La matrice A est-elle inversible ?

**Q. 4.2** Calculer les valeurs propres de A et des vecteurs propres associés.

**Q. 4.3** La matrice A est-elle diagonalisable ?

### Exercice 5

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Soit Y définie par

$$Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si X est paire} \\ 0 & \text{si X est impaire} \end{cases}$$

**Q. 5.1** Déterminer la loi de Y.

**Q. 5.2** Calculer l'espérance et la variance de Y.