

Exercice 1

A) Soit (E) l'équation différentielle définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$2xy' + y = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

dans laquelle y est une fonction numérique de la variable x .

1. Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle : $2xy' + y = 0$.
2. Vérifier que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(1+x)$ est une solution de (E).
3. Résoudre (E).
4. Déterminer la solution particulière f de (E) telle que : $f(1) = \ln(2)$.

B) Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(1+x) \text{ si } x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue en 0. (On pourra utiliser le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$).
2. f est-elle dérivable en 0 ? Préciser la tangente en 0 à la courbe représentative de f .
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{h(x)}{2x\sqrt{x}(1+x)}$$

où $h(x) = 2x - (x+1) \ln(x+1)$.

4. En déduire le tableau de variation de f . (On ne demande pas de représentation graphique).

C) On se propose de calculer l'aire du domaine plan (D) limité par la courbe (C), les droites $(x=0)$, $(x=1)$ et $(y=0)$. (Unité graphique : 1 cm).

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 f(x) dx = 2\ln(2) - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

2. Utiliser le changement de variable $\sqrt{x} = t$ dans l'intégrale pour calculer :

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx$$

3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$

En déduire la mesure en cm^2 de (D).

Exercice 2

1. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_2 = 1 - i \qquad z_3 = -7$$

$$z_5 = z_1 \times z_2 \qquad z_6 = \frac{z_1}{z_2} \qquad z_7 = z_1^8.$$

2. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$$z_8 = 5e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z_9 = 9e^{-i\pi} \qquad z_{10} = 6e^{5i\frac{\pi}{6}} \qquad z_{11} = 18e^{19i\frac{\pi}{2}}$$

3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 + z + 5 = 0.$ b) $3z^2 + 6 = 0$

Exercice 3

La cote z d'un solide en mouvement est régie par l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad mz'' + kz = \delta \cos \omega t \quad \text{où } z \text{ désigne une fonction définie sur }]-\infty; +\infty[$$

1. On donne $m = 2 \text{ kg}$; $k = 32 \text{ N.m}^{-1}$; $\delta = 48 \text{ N}$; $\omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$.

- a) Chercher une solution particulière de l'équation (E) du type :

$$z_0(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

- b) Donner toutes les solutions de l'équation (E).

- c) Déterminer la solution f de (E) vérifiant : $f(0) = 3$ et $f'(0) = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \cos 4t + 2 \cos 2t$.

- a) Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- b) Montrer que pour tout réel t , $f'(t) = -8 \sin 3t \cos t$.

- c) Donner le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- e) Tracer la courbe représentative de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , sur l'intervalle $[0; \pi]$, (unités graphiques : 2 cm).

On expliquera précisément comment on déduit le tracé sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ du tracé sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- f) Calculer la valeur moyenne $M = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4

1. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; +2\}$:

$$\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 4)(x + 2)} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2} + \frac{c}{(x + 2)^2}$$

Calculer ensuite $A = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 4)(x + 2)} dx$

2. Soit α un réel strictement positif.

a) Calculer $F(\alpha) = \int_0^\alpha (x^2 + 1)e^{-x} dx$.

b) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} F(\alpha)$.

Exercice 5

On se propose de calculer $I = \int_0^1 \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$.

1. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ est continue et croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

2. On utilise ensuite le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

a) Montrer que, pour tout réel θ , $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$.

b) En déduire que si $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, alors $\frac{2x}{1+x^2} = \sin(t)$.

Indication : on pourra poser $\theta = \frac{t}{2}$ et utiliser l'égalité $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$.

- c) Montrer, à l'aide du changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ que :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

3. Calculer I à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 6

- a) Vérifier que $1 + 3i$ est solution de l'équation $z^2 = 6i - 8$. Quelle est l'autre solution ?

- b) Après avoir vérifié que $z_0 = 2i$ est une solution, résoudre dans \mathbb{C} l'équation du troisième degré : $z^3 - (1+i)z^2 + 4z - 4 - 4i = 0$.

ooooo

ooo

o

FIN