

Exercice 1

1. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{3} + i & z_2 &= -1 + i & z_3 &= -3 \\ z_4 &= z_1 \times z_2 & z_5 &= \frac{z_1}{z_2} & z_6 &= z_1^8. \end{aligned}$$

2. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

$$z_7 = 5e^{i\frac{\pi}{3}} \quad z_8 = -7e^{-i\pi} \quad z_9 = 2e^{5i\frac{\pi}{6}} \quad z_{10} = 8e^{17i\frac{\pi}{2}}$$

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 + 3z + 5 = 0$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$xy' + 2y = \frac{1}{x^2}, \text{ désignée par (E),}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable x , définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$xy' + 2y = 0$$

2. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$, où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

Vérifier que g est une solution particulière de l'équation (E).

3. Donner la solution générale de (E).
4. Déterminer la fonction f , solution de (E), qui vérifie $f(1) = 1$.

Exercice 3

Les deux questions peuvent être traitées de façon indépendante.

1. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = (12x - 5)e^x$,

où y représente une fonction numérique de la variable x .

- a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E_0) : $y'' + y' - 2y = 0$.
b) Rechercher une solution particulière de (E) de la forme $y = (ax^2 + bx)e^x$ où a et b sont deux réels.
c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
d) Trouver la solution particulière f de (E) pour laquelle on a : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

2. On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (2x^2 - 3x + 2) e^x$$

et on désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan rapporté au repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; l'unité de longueur est 2 cm.

- a) Etudier la limite de f en $+\infty$.
- b) Etudier la limite de f en $-\infty$; en déduire que (C) admet une asymptote que l'on précisera.
- c) Etudier les variations de f .
- d) Tracer (C) (son allure) ainsi que la tangente au point d'abscisse 0. On admettra, qu'en ce point, la courbe (C) traverse sa tangente.

On donne les arrondis au dixième suivants : $7e^{-1} \approx 2,6$ et $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,7$.

- e) Calculer $A = \int_0^1 f(x) dx$. (On pourra utiliser deux intégrations par parties).

Exercice 4

1. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)^2} dx$

(on mettra la fonction sous la forme : $\frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$ où α, β et γ sont réels)

2. Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln(3)} \frac{\text{ch}(x)+1}{\text{ch}(x)} dx$ en faisant le changement de variable défini par : $t = e^x$.

(\ln désigne le logarithme népérien et $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)

3. Soit α un nombre réel, $0 < \alpha < 1$. On considère $F(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}$.

- a) Montrer que $F(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x^2} dx$.

- b) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. En déduire $\int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

- c) Déterminer $\int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (Utiliser le changement de variable : $x = \sin(\theta)$)

- d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(\alpha)$.

- e) Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha)$.

Exercice 5

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 12 = 0$$

On donnera, pour chaque solution, d'une part sa partie réelle et sa partie imaginaire, d'autre part son module et un de ses arguments.

2. Calculer module et argument du nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ (i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$).

En déduire les solutions de l'équation $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$.

On donnera, pour chaque solution, les mêmes éléments que ceux demandés dans la première question.

3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Démontrer que, dans le plan complexe, les quatre points d'affixes respectives les quatre racines de l'équation précédente sont les sommets d'un rectangle que l'on représentera.

o o o o o

o o o

o

FIN