

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) définie sur \mathbb{R} par : $y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}$.

1. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation (e) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = axe^{2x}$ soit solution de (E).
3. Dédire des questions précédentes la solution générale de l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation (E) dont la courbe représentative passe par le point $S(0; 2)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 2

Partie A : résolution d'une équation différentielle.

Soit (E) l'équation différentielle $y' + y = \frac{1}{e^x - 1}$ où y est une fonction de la variable réelle x dérivable sur $]0, +\infty[$ et où y' est la dérivée de y .

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $y' + y = 0$.
2. Vérifier que $\varphi(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x}$ est une solution particulière de (E) sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire la solution générale de (E) sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(\ln(2)) = 0$.

Partie B : étude d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; l'unité graphique est 2 cm.

1. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \ln(e^x - 1)$.

- a) Calculer la dérivée g' de g .

Vérifier que g' peut s'écrire sous la forme $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x - 1)^2}$.

En déduire les variations de g .

- b) Déterminer les limites de $g(x)$ lorsque x tend vers 0, puis lorsque x tend vers $+\infty$.
- c) En déduire qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ et un seul tel que $g(\lambda) = 0$.

Prouver que $1 \leq \lambda \leq 2$.

On donne les valeurs arrondies au dixième suivantes :

e	e^2	$\ln(e-1)$	$\ln(e^2-1)$
2,7	7,4	0,5	1,9

d) Etudier le signe de $g(x)$.

On ne demande pas de construire la courbe représentative de g .

2. Etude de f .

a) Déterminer, en le justifiant, les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

Pour la limite en $+\infty$, on pourra écrire :

$$f(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x - 1} \times \frac{e^x - 1}{e^x}.$$

b) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

En déduire les variations de f .

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Tracer la courbe (C) (son allure), en précisant la tangente à (C) au point A de (C) d'abscisse $\ln(2)$. On admettra que : $\ln(2) \approx 0,7$ $\alpha \approx 1,5$ et $f(\alpha) \approx 0,3$.

Partie C : calcul d'une aire.

Soit α un nombre réel strictement supérieur à 2.

On pose $I(\alpha) = \int_{\ln(2)}^{\ln(\alpha)} f(t) dt$.

1. déterminer une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction : $t \mapsto \frac{e^t}{e^t - 1}$.

2. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{e^t - 1} = -1 + \frac{e^t}{e^t - 1}$.

En déduire une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction : $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$.

3. En utilisant le fait que f est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E), prouver que :

$$I(\alpha) = -f(\ln(\alpha)) + \ln(e^{\ln(\alpha)} - 1) - \ln(\alpha) + \ln(2).$$

4. En déduire que :

$$I(\alpha) = -\frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha} + \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \ln(2).$$

5. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3

1. Calculer $A = \int_{-1}^1 x e^{-3x} dx$. (On pourra utiliser une intégration par parties)

2. Calculer $B = \int_{-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{3}{x^2 + 2x + 3} dx$.

(On pourra utiliser le changement de variable $x = \sqrt{3}u - 1$).

3.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que , pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

b) Soit $t \geq 1$. Calculer $\int_1^t \frac{dx}{x(1+x)^2}$.

c) Soit φ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \int_1^t \frac{\ln(x)}{(1+x)^3} dx.$$

En intégrant par parties, calculer $\varphi(t)$ en fonction de t .

d) Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} = 0$. En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \frac{1}{2} \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right)$.

4. Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$.

(On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{\pi}{4} - x$).

En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx$.

Exercice 4

1. Calculer : $\left(\frac{1-i}{i}\right)^3$; $(1-2i)(3+i)$; $\frac{2+3i}{5-i}$, $i^4 - i^7$.

2. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 + i ; & z_2 &= -1 + \sqrt{3}i ; & z_3 &= \sqrt{6} + \sqrt{2}i ; & z_4 &= z_1 z_2 ; \\ z_5 &= \frac{z_1}{z_2} ; & z_6 &= -z_2^4. \end{aligned}$$

3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^6 = 1$.

b) $z^2 + z + 3 = 0$.

4. Quels sont les ensembles des points M qui dans un repère orthonormé ont des affixes z vérifiant les propriétés données :

a) $|z| < 1$ b) $z + \bar{z} > z\bar{z}$ c) $z + \bar{z} = z\bar{z} - 1$.

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○

○

FIN