

Exercice 1

A) On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' - y = -x$$

où y désigne une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et y'' la dérivée seconde de y .

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E') : y'' - y = 0$$

2. Déterminer une solution particulière g de (E) sous la forme d'un polynôme du premier degré.
3. En déduire la solution générale de (E).
4. Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie les conditions initiales

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

B) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{-x} - e^x + x$

et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que f est une fonction impaire.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Calculer la dérivée f' de f .
4. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ admet $m = 1$ comme minimum et en déduire le signe de $f'(x)$.
5. Dresser le tableau de variation de f .
6. Donner l'équation de la tangente (OT) à l'origine à la courbe (C).
7. Donner le développement limité de $f(x)$, à l'ordre 3, au voisinage de 0 et en déduire la position de (C) par rapport à la tangente (OT).
8. Tracer une allure de (C) et sa tangente (OT) dans la même repère.
9. Déterminer en cm^2 l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe (C), la tangente (OT) et les deux droites d'équations : $(x = -1)$ et $(x = 0)$.
En déduire l'aire en cm^2 de la portion de plan comprise entre la courbe (C), la tangente (OT) et les deux droites d'équations $(x = -1)$ et $(x = 1)$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de déterminer la position du centre d'inertie G d'une plaque homogène (P) d'épaisseur négligeable.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = 2x + \sin(2x)$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; l'unité graphique est 2 cm.

La plaque (P) est alors représentée en vraie grandeur par la portion du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $(x = \pi)$.

1. Calculer la fonction dérivée de la fonction f . En déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Dresser le tableau de variation de f .

2. Déterminer les nombres dérivés $f'(0)$, $f'(\frac{\pi}{2})$ et $f'(\pi)$.

Tracer (C) et les tangentes à la courbe (C) aux points d'abscisses respectives 0 ; $\frac{\pi}{2}$ et π .

3. Démontrer que l'aire, exprimée en unité d'aire, de la plaque est égale à π^2 .

4. On admettra que les coordonnées du centre d'inertie G de la plaque sont données par :

$$x_G = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi x \cdot f(x) dx \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi [f(x)]^2 dx$$

$$\text{On pose} \quad I = \int_0^\pi \sin^2(2x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi x \cdot \sin(2x) dx$$

$$\text{a) Vérifier que } x_G = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{3} \pi^3 + J \right) \quad \text{et que} \quad y_G = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{4}{3} \pi^3 + 4J + I \right).$$

$$\text{b) Calculer } I \text{ (on pourra utiliser la formule } \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \text{)}.$$

$$\text{c) Calculer } J \text{ (on pourra utiliser une intégration par parties)}.$$

$$\text{d) Déduire des résultats précédents les coordonnées du point G. Placer G.}$$

Exercice 3

$$1. \text{ Calculer : } \left(\frac{1-i}{i} \right)^4, \quad (1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i) \quad \text{et} \quad \frac{2+3i}{5-i}.$$

2. Ecrire à l'aide de la notation exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} \quad z_2 = \frac{1+i}{1-i} \quad z_3 = -5 \quad z_4 = \frac{1}{z_1} \quad z_5 = z_2^{16} \quad z_6 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^6.$$

3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\text{(eq}_1\text{)}: z^2 - z + 1 = 0.$$

$$\text{(eq}_2\text{)}: (z+i)^3 = (z-i)^3.$$

$$\text{(eq}_3\text{)}: \left(\frac{z\sqrt{3}+1}{2z} \right)^2 + \left(\frac{2z}{z\sqrt{3}+1} \right)^2 = 1.$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad \ln(x) y' + \frac{1}{x} y = 1$$

où y est une fonction de la variable x dérivable sur $I =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et où y' désigne la dérivée de y .

1.

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

b) En déduire la solution générale de l'équation différentielle

$$(e) \quad \ln(x) y' + \frac{1}{x} y = 0$$

sur I .

2. Vérifier que la fonction g définie sur I par $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(2) = \frac{1}{\ln(2)}$.

5. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$.

a) Montrer que f est une solution de (E).

b) Calculer $f'(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$.

c) La fonction f est-elle une solution de (E) sur $]0, +\infty[$?

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer $\iint_{\mathcal{D}} x^2 y \, dx \, dy$, où \mathcal{D} est la partie du plan comprise entre la droite d'équation $(y = -4x + 5)$ et l'hyperbole d'équation $(y = \frac{1}{x})$.

1. Représenter graphiquement \mathcal{D} .

2. Calculer $A(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{-4x+5} x^2 y \, dy$.

3. Calculer $\int_{\frac{1}{4}}^1 A(x) \, dx$.

Exercice bonus

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E) : $y' + y = \max(x, 0)$.

Quelle est la solution y de (E) qui vérifie $y'(0) = 1$?

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○

○

FIN.

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$
 $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$
 $a^b = e^{b \ln a}$
 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
 $\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$
 $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$
 $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
 $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$
 $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
 $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
 $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
 $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
 $e^{iu} = \cos u + i \sin u$
 $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $\text{ch } t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$
 $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, $\text{sh } t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

$e^{a+ib} = e^a (\cos(\theta t) + i \sin(\theta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

$(a+ib)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$;
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$;
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$;
 Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$
 Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$
 Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$
 Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

f(t)	f'(t)	f(t)	f'(t)
ln t	1/t	sh t	ch t
e ^t	e ^t	ch t	sh t
t ^α (α ∈ ℝ)	α t ^{α-1}	Arc sin t	1/√(1-t ²)
sin t	cos t	Arc tan t	1/(1+t ²)
cos t	-sin t	e ^{at} (a ∈ ℂ)	ae ^{at}
tan t	1/cos ² t		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$
 $(ku)' = k u'$
 $(uv)' = u'v + uv'$
 $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$
 $(e^u)' = e^u u'$
 $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
 $(u^n)' = n u^{n-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur [a, b] :

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

Intégration par parties :

$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$

d) Développement limités

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$
 $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + o(t^n)$
 $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + o(t^n)$

e) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = \lambda e^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{\eta t} + \mu e^{\nu t}$ où η et ν sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\eta + \mu t)e^{\eta t}$ où η est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta < 0$, $f(t) = [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $\eta = \alpha + i\beta$ et $\nu = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

