

FIP

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

SAMEDI 19 MAI 2012

Exercice 1 les parties 1. et 2. sont indépendantes.

1. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i \quad z_2 = 3 - \sqrt{3}i \quad z_3 = z_1 z_2 \quad z_4 = \frac{z_1}{z_2}$$

$$z_5 = z_2^6 \quad z_6 = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad z_7 = -2 \quad z_8 = -\frac{1}{3}i$$

(utiliser z_6^2)

2. α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$, défini par :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2 \sin \alpha)z^2 + (1 + 2 \sin \alpha)z - 1.$$

a) Calculer $P(1)$.

b) En déduire l'existence de trois nombres réels a , b , et c tels que :

$$P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c).$$

déterminer a , b , et c .

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} , l'équation $P(z) = 0$.

d) On considère les trois nombres complexes :

$$Z_1 = 1 ; \quad Z_2 = -\sin \alpha + i \cos \alpha \quad Z_3 = -\sin \alpha - i \cos \alpha.$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces complexes.

Exercice 2 Calcul intégral (les parties 1. et 2. sont indépendantes).

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x) \cdot \sin(2x) \cdot \sin(3x)$.

a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 6x$.

b) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x) dx$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par $g(x) = \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2}$.

a) Déterminer les réels a , b , et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

$$g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

b) En déduire sur $]1 ; +\infty[$ une primitive G_1 de g .

c) Déterminer une primitive G_2 de g sur l'intervalle $] -1 ; 1[$, puis une primitive G_3 de g sur $] -\infty ; -1[$.

d) Calculer $\int_{-4}^{-2} \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+1)^2} dx$.

Exercice 3

A) On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 2y' + 2y = 2$$

où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y'' + 2y' + 2y = 0$.

2. Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = a$$

soit solution de l'équation (E).

3. Déterminer la solution générale de l'équation (E).

4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

B) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 1 - e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

1. Démontrer que la fonction f est solution de (E).

2. Calculer $f'(x)$

3. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{11\pi}{4}\right]$

(On trouvera la représentation graphique de la fonction f en annexe)

4. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(x) - 1$.

Tracer la courbe représentative de g . On choisira un repère orthogonal d'unités :

2 cm pour l'axe des abscisses, 200 cm pour l'axe des ordonnées.

Tableau de valeurs : (arrondis au dix-millième)

$e^{-\pi}$	$e^{-\frac{5\pi}{4}}$	$e^{-\frac{9\pi}{2}}$	$e^{-2\pi}$	$e^{-\frac{9\pi}{4}}$	$e^{-\frac{5\pi}{2}}$	$\sqrt{2}$
0,0432	0,0197	0,0090	0,0019	0,0009	0,0004	0,4142

C) Régulation de niveau d'un réservoir.

Une installation de dilution comprend un réservoir, des vannes et un système automatisé de régulation. Le niveau étant stabilisé dans le réservoir, le recyclage du produit provoque à un moment précis une variation brusque de consigne : +1 m.

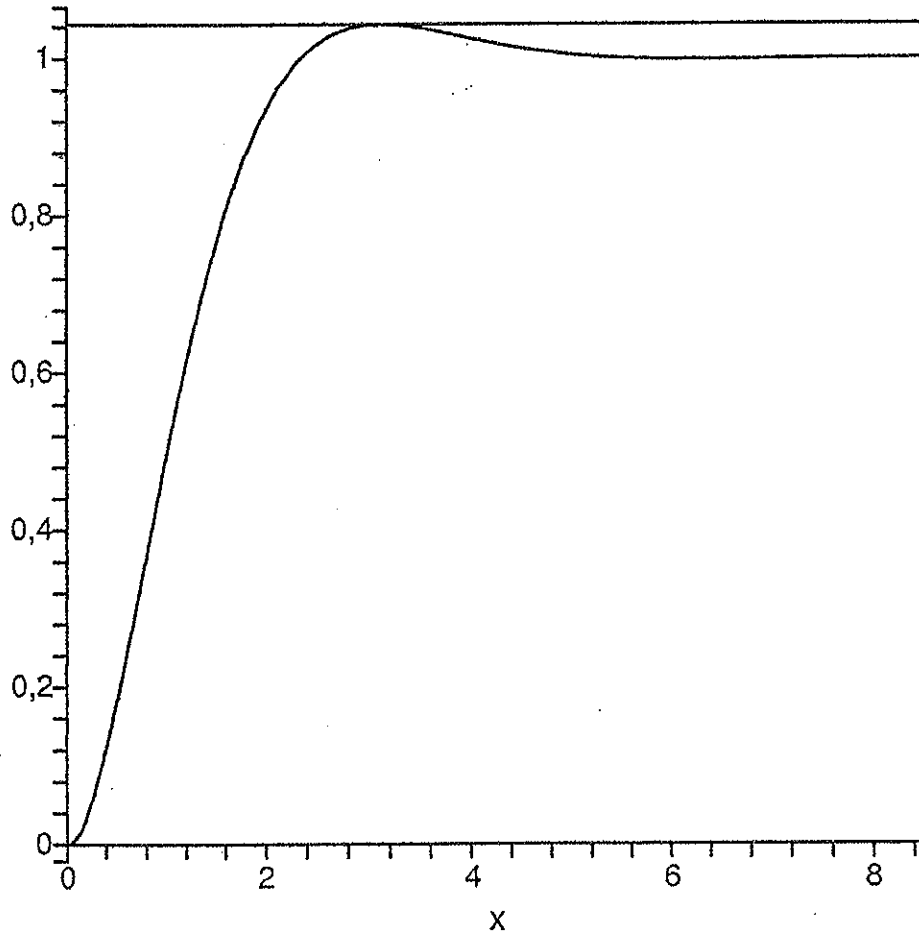
Le niveau n (en mètres), en fonction du temps (en minutes), est la solution de l'équation différentielle :

$$0,5 \frac{d^2n}{dt^2}(t) + \frac{dn}{dt}(t) + n(t) = 1.$$

qui vérifie $n(0) = \frac{dn}{dt} = 0$.

Utiliser les parties A) et B) pour répondre aux questions suivantes :

1. Donner l'expression de la solution $n(t)$.
2. A quel instant t_{\max} le réservoir est-il à son niveau maximal ?
En déduire la hauteur de niveau du premier dépassement : $n(t_{\max}) - 1$.
Le résultat sera arrondi au dixième de cm.



Exercice 4

Soit (E) l'équation différentielle : $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$

où y est une fonction de la variable réelle x dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, et où y' est la fonction dérivée de y .

1. Résolution de l'équation différentielle (e) : $x(x^2 - 1)y' + 2y = 0$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que , pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$,

$$\frac{2}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2 - 1}$$

b) En déduire la solution générale de (e) sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ par $g(x) = \frac{x^2 \ln |x|}{x^2 - 1}$ est une solution particulière de (E).

3. En déduire la solution générale de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

4.

a) Déterminer la solution f de (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ qui vérifie :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln 2}{3} \quad \text{et} \quad f(2) = f(-2) = \frac{4 \ln 2}{3}.$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. (On pourra écrire $x = 1 + h$ et utiliser un développement limité de $\ln(1 + h)$).

En déduire que f peut être prolongée en une fonction continue sur \mathbb{R} que l'on notera f_1 .

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1}$. (On pourra écrire $x = 1 + h$ et utiliser un développement limité de $\ln(1 + h)$).

La fonction f_1 est-elle solution de (E) sur \mathbb{R} ?

Exercice 5

Soit $I = \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$. $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 4 \right\}$.

1. Représenter graphiquement D .

2. Calculer $\int_1^{4-x} \frac{dy}{(x+y)^2}$.

3. Calculer I .

Exercice 6

***Calculer l'intégrale double : $\iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1, y \leq x\}.$$

□ □ □ □ □

□ □ □

□

FIN.

- a) Loi binomiale $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ou $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$
- b) Loi de Poisson

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

$\lambda \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,9817	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488						
1	0,1637	0,7272	0,2681	0,3033	0,3793						
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0968						
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198						
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030						
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004						
6			0,0000	0,0000	0,0000						

$k \backslash \lambda$	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,568	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,568	0,235	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,176	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16								0,001	0,005	0,011	0,022
17									0,001	0,006	0,013
18										0,003	0,007
19											0,004
20											0,002
21											0,001
22											0,000

c) Loi exponentielle

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (M.T.B.F.)$$

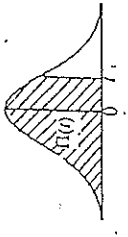
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Formulaire de mathématiques

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)



$$\Phi(x) = P(\tau \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

x	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7191	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7421	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9221	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9785	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE x

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Phi(x)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,99984	0,999928	0,999968	0,99997

Nota : $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
Formulaire de mathématiques

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$
 $\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$
 $a^b = e^{b \ln a}$
 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
 $\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$
 $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$
 $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
 $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$
 $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
 $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$;
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$;
 $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$;
 Si $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^a = +\infty$; si $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^a = 0$

Comparaisons comparées à l'infini

Si $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^a} = +\infty$
 Si $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$
 Si $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^a = 0$; si $a < 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^a = +\infty$
 Si $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^a \ln t = 0$.

$e^{a+ib} = e^{a\alpha} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$
 $(a+ib)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3a b^2 + b^3$

b) Dérivées et primitives

$f(t)$	$F(t)$	$f(t)$	$F(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{sh } t$	$\text{sh } t$
e^t	e^t	$\text{sh } t$	$\text{ch } t$
$f^{(\alpha)} (\alpha \in \mathbb{R})$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$	$\text{Arc sin } t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$-\cos t$	$\text{Arc tan } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$\sin t$	$e^{a t} (a \in \mathbb{C})$	$a e^{a t}$
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$
 $(k u)' = k u'$
 $(u v)' = u' v + u v'$
 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$
 $(v \circ u)' = (v' \circ u) u'$
 $(e^u)' = e^u u'$
 $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
 $(u^a)' = a u^{a-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:
 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$
 Intégration par parties :
 $\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$

d) Developpements limités

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + e^t \epsilon(t)$
 $1 - e^{-t} = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + e^{-t} \epsilon(t)$
 $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p+1} \epsilon(t)$
 $\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+2} \epsilon(t)$
 $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n} + t^n \epsilon(t)$

e) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t) x' + b(t) x = 0$	$f(t) = k e^{-Q(t)}$ où Q est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax^2 + bx + c = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{r_1 t}$ Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique