

FIP
EPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Samedi 21 mai 2011.

Exercice 1.

I. RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

1. On considère l'équation différentielle sur $] -1, +\infty[$:

$$(E) \quad (x+1)y' + (x-1)y = -x+1.$$

où y est une fonction de la variable réelle x sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ et où y' désigne la dérivée de y .

a) Soit g la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout réel x de $] -1, +\infty[$:

$$g(x) = a + \frac{b}{x-1}.$$

En déduire la primitive G de g sur $] -1, +\infty[$ telle que $G(0) = 0$.

b) Résoudre sur $] -1, +\infty[$ l'équation différentielle (e) : $(x+1)y' + (x-1)y = 0$.

2. Déterminer le nombre réel m pour que la fonction constante h définie sur $] -1, +\infty[$ par $h(x) = m$ soit solution de (E).
3. Déduire du 1.b) et du 2. l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

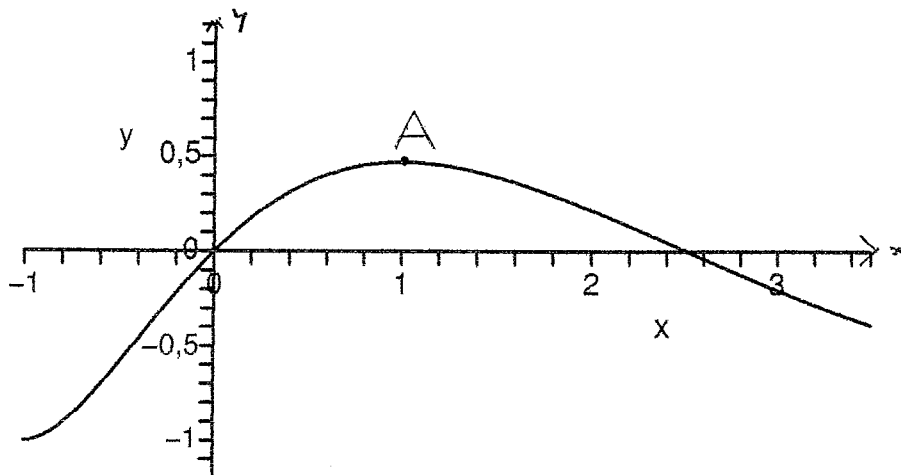
II. ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION.

Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x} - 1.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A l'aide d'une calculatrice graphique on a obtenu le dessin ci-dessous.



- Déterminer la fonction dérivée f' de f .
Soit A le point de (C) d'abscisse 1. Donner la valeur exacte de l'ordonnée de A.
Préciser la tangente en A à la courbe (C).
- La courbe (C) admet-elle une asymptote en $+\infty$? Justifier la réponse.
- A l'aide du développement limité, au voisinage de 0, de la fonction $t \mapsto e^t$, écrire le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
En déduire le développement limité d'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f .
- Déduire du 3. une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 et la position relative de (C) et (T) au voisinage de ce point.

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 3y'(x) + 2y(x) = 2xe^{-2x}$

où y est une fonction de la variable x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et y la dérivée seconde de y .

- Résoudre l'équation différentielle (e) : $y'' + 3y'(x) + 2y(x) = 0$
- Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (ax^2 + bx)e^{-2x}$ soit solution de l'équation (E).
- Déterminer la solution générale de l'équation (E).
- Quelle est la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$?

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

- f est de période 2π
- $f(t) = \sin t$ si $t \in [0, \pi]$
- $f(t) = 0$ si $t \in]\pi, 2\pi[$

- Représenter f .

Calculer la valeur moyenne de f c'est-à-dire : $\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$.

- Calculer le nombre $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$ ($n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$).

Exercice 4.

Calcul de l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 4x + 8} dx$

- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $x^2 + 4x + 8 = 0$.
- Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x^2 + 4x + 8$.
 - Calculer $u'(x)$.
 - Déterminer deux constantes réelles a et b telles que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\frac{x}{x^2+4x+8} = a \frac{u'(x)}{u(x)} + b \frac{1}{u(x)}.$$

3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $A_1 = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+8} dx$.

4. Déterminer la forme canonique de $u(x) = x^2 + 4x + 8$, c'est-à-dire des constantes α et β telles que pour tout $x \in [0, 1]$, $u(x) = (x + \alpha)^2 + \beta$.

5. En effectuant le changement de variable $t = u + 2$, démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x^2+4x+8} dx = \int_2^3 \frac{2}{t^2+4} dt$$

6. En effectuant le changement de variable $y = \frac{t}{2}$, calculer la valeur exacte de

$$A_2 = \int_0^1 \frac{2}{x^2+4x+8} dx$$

7. Dédire des questions précédentes la valeur exacte de l'intégrale A .

Exercice 5.

1. Ecrire en notation exponentielle :

$$z_1 = \sqrt{3} - 3i \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+i} \quad z_3 = -5i \quad z_4 = \left(\frac{1}{z_1}\right)^7.$$

2. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $|z - 5| = 3$?

3. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que $\arg(z - (3 - i)) = \frac{\pi}{3}$?

4. Soit $P(z) = z^4 + (-4 - 4i)z^3 + (-6 + 20i)z^2 + (28 + 32i)z + 32 - 48i$.

a) Calculer $P(-2)$. En déduire une factorisation de $P(z)$ sous la forme

$$P(z) = (z + 2)Q(z).$$

b) Démontrer que $Q(z)$ admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera (cette racine pourra être notée bi où $b \in \mathbb{R}$)

c) Achever la résolution de $P(z) = 0$.

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○

○

FIN.

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1 = 1 - 2 \sin^2 t$

$\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$

$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$, $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$

$e^{a+ib} = e^a (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$, où $a = \alpha + i\beta$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\text{ch } t$	$\text{sh } t$
e^t	e^t	$\text{sh } t$	$\text{ch } t$
t^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha t^{\alpha-1}$	$\text{Arc sin } t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
$\sin t$	$\cos t$	$\text{Arc tan } t$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\cos t$	$-\sin t$	e^{at} ($a \in \mathbb{C}$)	ae^{at}
$\tan t$	$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t$		

Opérations

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = k u'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$

$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^a)' = a u^{a-1} u'$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$:

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$

Intégration par parties :

$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$

d) Développements limités

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + t^n \epsilon(t)$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + t^n \epsilon(t)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} + t^n \epsilon(t)$

$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1} \epsilon(t)$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p} \epsilon(t)$

$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n + t^n \epsilon(t)$

e) Equations différentielles

Equations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x' + b(t)x = 0$	$f(t) = ke^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$
$ax'' + bx' + cx = 0$	Si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation caractéristique :	Si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda + \mu t)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	Si $\Delta < 0$, $f(t) = [\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.
de discriminant Δ	

3. PROBABILITES

a) Loi binomiale $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X) = np$; $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

b) Loi de Poisson

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,368	0,223	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,368	0,335	0,271	0,149	0,073	0,034	0,015	0,006	0,003	0,001	0,000
2	0,184	0,251	0,271	0,224	0,147	0,084	0,045	0,022	0,011	0,005	0,002
3	0,061	0,126	0,180	0,224	0,195	0,140	0,089	0,052	0,029	0,015	0,008
4	0,015	0,047	0,090	0,168	0,195	0,176	0,134	0,091	0,057	0,034	0,019
5	0,003	0,014	0,036	0,101	0,156	0,176	0,161	0,128	0,092	0,061	0,038
6	0,001	0,004	0,012	0,050	0,104	0,146	0,161	0,149	0,122	0,091	0,063
7	0,000	0,001	0,003	0,022	0,060	0,104	0,138	0,149	0,140	0,117	0,090
8		0,000	0,001	0,008	0,030	0,065	0,103	0,130	0,140	0,132	0,113
9			0,000	0,003	0,013	0,036	0,069	0,101	0,124	0,132	0,125
10				0,001	0,005	0,018	0,041	0,071	0,099	0,119	0,125
11				0,000	0,002	0,008	0,023	0,045	0,072	0,097	0,114
12					0,001	0,003	0,011	0,026	0,048	0,073	0,095
13					0,000	0,001	0,005	0,014	0,030	0,050	0,073
14						0,000	0,002	0,007	0,017	0,032	0,052
15							0,001	0,003	0,009	0,019	0,035
16							0,000	0,001	0,005	0,011	0,022
17								0,001	0,002	0,006	0,013
18								0,000	0,001	0,003	0,007
19									0,000	0,001	0,004
20										0,001	0,002
21										0,000	0,001
22											0,000

c) Loi exponentielle

Fonction de fiabilité: $R(t) = e^{-\lambda t}$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ (M.T.B.F.)}$$

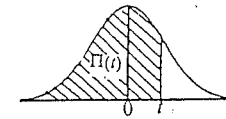
$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$$

d) Loi normale:

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE N(0,1)

$$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota: $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$