

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il prendra.

Exercice 1

1. Mettre sous la forme $a + ib$ puis représenter dans le plan complexe :

$$(1 - 2i)(2 + i) \qquad \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i} \qquad (1 - i\sqrt{3})^3$$

2. Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.
Déterminer les modules et arguments de :

$$z_1, \quad z_2, \quad z_1 \times z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_2^7.$$

3. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $z^2 + 5 + 2z = 0$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$$

Calculer ensuite $\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x+1)^2} dx$

2. On pose $I(x) = \int_0^x \sin(3t)e^{-t} dt$.

a) Calculer $I(x)$ puis $I(\pi)$. (On pourra utiliser deux intégrations par parties)

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \frac{3}{10}$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y'' + 9y = 2\cos(5x)$$

où y est une fonction de la variable réelle x deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

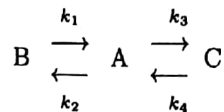
1. Résoudre l'équation différentielle

$$(e) : y'' + 9y = 0$$

- Déterminer le réel a tel que $y(x) = a \cos(5x)$ soit solution de (E) .
- Donner la solution générale de (E) .
- Déterminer la solution f de (E) , qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

Exercice 4

On étudie des réactions chimiques au cours desquelles un corps A subit des transformations selon le schéma suivant.



k_1, k_2, k_3, k_4 sont les constantes de vitesse.

On note $x(t), y(t), z(t)$ les concentrations respectives des produits A, B et C à un instant t donné (t exprimé en minutes)

Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

On dispose au-dessus de la cuve où a lieu la réaction une burette par laquelle on verse du produit A à une vitesse constante dans la cuve.

Dans ces conditions expérimentales, les fonctions x, y, z définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x'(t) = 1 - 2x(t) + y(t) + z(t) \\ \frac{dy}{dt} = y'(t) = x(t) - y(t) \\ \frac{dz}{dt} = z'(t) = x(t) - z(t) \end{cases}$$

Première partie

1. Calculer $\frac{d}{dt} [x + y + z]$ et, à l'aide des conditions initiales, en déduire que

$$y(t) + z(t) = 1 + t - x(t)$$

2. Démontrer que x est solution de l'équation différentielle $(E) \quad x'(t) + 3x(t) = 2 + t$

3. Déterminer une fonction affine x_0 solution particulière de l'équation (E) .

4. Résoudre alors l'équation (E) .

5. Déterminer la solution particulière x_1 de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $x_1(0) = 1$.

6. Démontrer que $\frac{d}{dt} (y - z) + y - z = 0$, et en déduire que $y = z$. Des questions précédentes déduire l'expression de $y(t)$ et $z(t)$.

Deuxième partie

On considère maintenant la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{5}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9}e^{-3t}$$

On désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 5 cm)

1. Calculer $f'(t)$ et étudier les variations de la fonction f en justifiant clairement l'étude du signe de la dérivée.
2. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Démontrer que la droite \mathcal{D} d'équation $y = \frac{1}{3}t + \frac{5}{9}$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .
Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.
3. Représenter dans un même repère orthonormal (d'unité 5 cm) la courbe \mathcal{C} , son asymptote \mathcal{D} , et sa tangente au point d'abscisse 0.
(On prendra $\ln(2) \approx 0,7$).

Troisième partie

Préciser alors, à l'aide des résultats des deux premières parties, si après 1 minute et 20 secondes la concentration en produit A aura dépassé sa concentration initiale.

Exercice 5

Calcul de $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} dx$.

1. A l'aide du changement de variable $x + u = \sqrt{x^2 + x + 2}$, montrer que $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{2u^2 - 4}{\sqrt{2}(1 - 2u)^2} du$.
2. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$:

$$\frac{2u^2 - 4}{(1 - 2u)^2} = a + \frac{b}{u - \frac{1}{2}} + \frac{c}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2}$$

3. Calculer I .

○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○

○

FIN.