

Exercice 1

1. Calculer : $z_1 = (2 - 3i)(5 + 3i)$ $z_2 = \frac{3 + 2i}{1 - i}$ $z_3 = (2 + i)^3$

2. Déterminer le module et un argument de :

$$z_4 = 1 + i \quad z_5 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_6 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2} \quad z_7 = -5i$$

3. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{C} :

$$a) \quad 2z^2 - z + 1 = 0 \quad b) \quad 9z^2 = -4$$

Exercice 2**PREMIÈRE PARTIE**

On considère l'équation différentielle (E) :

$$(E) : y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 1$$

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle : $(e) : y'' - 2y' + y = 0$.
2. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction polynôme p définie par $p(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de l'équation (E).
3. Résoudre (E).
4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (-x + 1)e^x + x^2 - 1$

1. Etudier le tableau de variation de f et faire le tableau de variation en précisant les valeurs exactes aux extrêmes.
2. Etudier la position au voisinage de 0 de la courbe (\mathcal{C}) représentative de f par rapport à la courbe (\mathcal{P}) d'équation $y = \frac{x^2}{2}$. (En utilisant le développement limité en zéro à l'ordre 3 de e^x , on pourra écrire le développement limité à l'ordre 3 en zéro de $f(x)$)
3. On munit le plan d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 10 cm :
 - Tracer les arcs de courbes (leurs allures) (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}) correspondant aux points d'abscisses comprises entre -1 et 1 . On précisera les tangentes aux points d'abscisses 1 et -1 .
 - Calculer l'aire en centimètres carrés du domaine compris entre la courbe (\mathcal{C}), l'axe des abscisses et les droites d'équations $(x = 0)$ et $(x = \ln 2)$. On demande la valeur exacte en cm^2 . (On pourra utiliser une intégration par parties).

On donne les valeurs approchées suivantes : $e \quad e^{-1} \quad \ln 2$
 $2,7 \quad 0,4 \quad 0,7$

Exercice 3

Soit (E) l'équation différentielle : $xy' - 2y = \ln x$ où \ln désigne le logarithme népérien.

On désigne par f une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, solution de (E) et vérifiant la condition $f(1) = 0$.

On se propose de déterminer f .

- Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : $xy' - 2y = 0$
- Vérifier que la fonction g , définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4}$ est une solution de l'équation (E).
- En déduire la solution générale de l'équation (E).
- Déterminer la fonction f .

Exercice 4

- Déterminer les constantes réelles a , b , et c telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\frac{1}{x(x+2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$$

En déduire le calcul de :

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x(x+2)^2}.$$

- Calculer (on pourra utiliser les formules d'Euler) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\alpha x} \cos \omega x \, dx$$

Application numérique : $\alpha = -1$ et $\omega = \frac{\pi}{4}$.

- Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \, dx$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = x + 1$.

Exercice 5

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; m étant un paramètre réel, on considère le nombre complexe z_m défini par :

$$z_m = \frac{-\frac{1}{2} + m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} - m + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

- Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_m .
- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la partie réelle de z_m est nulle. Calculer le module et un argument de z_m pour chacune des valeurs de m obtenues.
- Résoudre dans \mathbb{C} , corps des complexes; l'équation :

$$(z+i)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot z_{-1}$$

où z_{-1} désigne la valeur de z_m pour $m = -1$.

Exercice 6

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(4x) = 4\cos^3(x)\sin(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$.
- Calculer , en utilisant le changement de variable $t = \sin(x)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4x)}{\sin(x)} \, dx.$$