

## Exercice 1

On note  $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices de taille  $3 \times 3$  à coefficients réels. On considère les éléments suivants de  $E$  :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.*

### Partie A – Réduction

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .
2. Justifier que  $A$  possède une unique valeur propre et donner son ordre de multiplicité.
3. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ? Est-elle trigonalisable ?

On considère dans la suite de cette partie l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique notée  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_2) &= 2e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_3) &= e_1 - e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

4. Déterminer la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
5. Calculer le rang de la matrice  $A$ . L'endomorphisme  $f$  est-il surjectif ?
6. L'endomorphisme  $f$  est-il injectif ? Est-il bijectif ?
7. On pose  $e'_1 = (1, 0, -1)$  et  $e'_2 = (1, -1, 1)$ . Montrer que la famille  $(e'_1, e'_2)$  forme une base de l'espace vectoriel  $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ .
8. (a) Montrer que  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e_1)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .  
(b) Calculer la matrice représentative de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

### Partie B – Étude d'une suite de matrices

1. Montrer que  $A^2 = 2A - I$ .
2. Montrer que la matrice  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = 2I - A$ .
3. Soient  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  des nombres réels vérifiant  $\alpha I + \beta A = \alpha' I + \beta' A$ . Montrer que  $\alpha = \alpha'$  et  $\beta = \beta'$ .

On définit la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  par la condition initiale  $X_0 = A$  et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \frac{X_n^2}{n+1} + 2I - A.$$

4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , il existe un unique couple  $(\alpha_n, \beta_n)$  de réels tel que

$$X_n = \alpha_n I + \beta_n A,$$

et que ce couple vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} = \frac{2\beta_n(\alpha_n + \beta_n)}{n+1} - 1 \end{cases}$$

5. Déterminer  $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3$  et  $\beta_3$ .
6. Au vu du résultat de la question précédente, conjecturer une expression de  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ , pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$ , puis montrer cette conjecture. En déduire l'expression de  $X_n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice 2

On considère la fonction  $2\pi$ -périodique  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi[ \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-3\pi, 3\pi[$ .

On note

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

la série de Fourier de la fonction  $f$ .

2. (a) Calculer le coefficient  $a_0$ .  
 (b) Calculer les coefficients  $a_n$ , pour tout entier naturel non nul  $n$ .  
 (c) Calculer les coefficients  $b_n$ , pour tout entier naturel non nul  $n$ .  
 (d) Montrer que la série de Fourier de  $f$  est convergente. Énoncer le théorème utilisé et préciser la fonction vers laquelle elle converge.

3. En évaluant la série de Fourier de  $f$  en un point particulier, montrer que  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

4. En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

5. (a) Énoncer le théorème de Parseval.  
 (b) Donner la valeur de  $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ .

## Exercice 3

On rappelle que la fonction tangente, notée  $\tan$ , réalise une bijection strictement croissante de  $]-\pi/2, \pi/2[$  vers  $\mathbb{R}$ . Sa fonction réciproque, notée  $\arctan$ , est donc une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  vers  $]-\pi/2, \pi/2[$ . Elle est de plus impaire, dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

*Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante. La première question de la partie C nécessite le résultat de la question 2 de la partie B. Les questions 2 à 8 de la partie C peuvent être traitées de manière indépendante des parties A et B.*

## Partie A – Résolution d’une équation différentielle

On considère l’équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{x(1+x^2)} \quad (\text{E})$$

d’inconnue une fonction réelle  $y$  définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On note (H) l’équation différentielle homogène associée à (E) :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0 \quad (\text{H})$$

1. Déterminer l’ensemble des solutions de l’équation différentielle homogène (H) sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
2. Déterminer une fonction  $\lambda$  dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  telle que la fonction  $x \mapsto \frac{\lambda(x)}{x}$  soit solution particulière de l’équation différentielle (E) sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
3. En déduire l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

## Partie B – Étude d’une fonction

On considère la fonction  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

1. (a) Donner le développement limité de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  au voisinage de 0 à l’ordre 2.  
(b) En déduire le développement limité de  $\arctan$  au voisinage de 0 à l’ordre 3, puis celui de la fonction  $f$  au voisinage de 0 à l’ordre 2.
2. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0. Préciser par quelle valeur elle peut être prolongée.

Dans la suite on continuera à noter  $f$  la fonction ainsi prolongée de sorte que  $f$  est désormais définie sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que la fonction  $f$  est dérivable en 0. Préciser  $f'(0)$  et la position du graphe de la fonction  $f$  par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
4. Étudier les variations de la fonction  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $p(x) = x - (1+x^2)\arctan(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Donner le signe de  $p(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
5. Démontrer que pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ , on a  $f'(x) = \frac{p(x)}{x^2(1+x^2)}$  puis prouver que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
6. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ . On y fera apparaître ses limites en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

## Partie C – Calcul approché d’une intégrale

Dans cette partie on étudie l’intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t} dt$$

dont on cherche à donner une approximation. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 1]$ , on définit

$$r_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

1. Pourquoi l'intégrale  $I$  est-elle bien définie ? *Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 2 de la partie B.*
2. Établir pour tout réel  $x \in [0, 1]$  la majoration

$$|r_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

3. Justifier que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout réel  $t$  de  $[0, 1]$ , on a

$$1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1 - (-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}.$$

En déduire pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$  l'égalité suivante :

$$xs'_n(x) = \arctan(x) - r_n(x).$$

4. Écrire le nombre  $s_n(1) - I$  à l'aide d'une intégrale puis montrer que

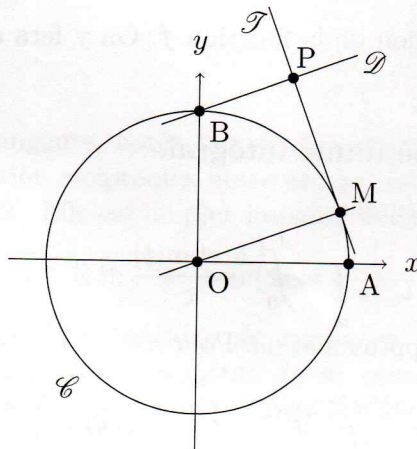
$$|s_n(1) - I| \leq \int_0^1 \left| \frac{r_n(t)}{t} \right| dt \leq \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(1)$ .

5. Déterminer un entier naturel  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $s_N(1)$  soit une valeur approchée de  $I$  à  $10^{-4}$  près.
6. Écrire une fonction nommée **s**, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel non nul  $n$  et renvoie le nombre  $s_n(1)$ .
7. Écrire une fonction nommée **trouve\_N**, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un réel strictement positif  $\varepsilon$  et renvoie le plus petit entier  $N$  tel que  $\frac{1}{(2N+1)^2} \leq \varepsilon$ .
8. En utilisant les fonctions **s** et **trouve\_N**, écrire en *Scilab* ou bien en pseudo-code les instructions calculant et affichant une valeur approchée de l'intégrale  $I$  à  $10^{-10}$  près.

## Exercice 4

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 1. Les points  $A(1, 0)$  et  $B(0, 1)$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}$ . Soit  $\theta$  un réel appartenant à  $[0, 2\pi[$ . On considère le point  $M(\cos \theta, \sin \theta)$  de  $\mathcal{C}$ .

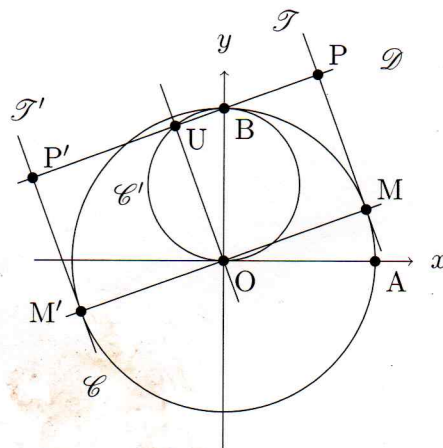


1. Donner une équation cartésienne de la tangente  $\mathcal{T}$  en M au cercle  $\mathcal{C}$ .
2. Donner une équation cartésienne de la droite  $\mathcal{D}$  passant par B et parallèle à (OM).
3. Déterminer, en fonction du paramètre réel  $\theta$ , tous les couples de réels  $(x, y)$  qui vérifient le système

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = 1 \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = \cos \theta \end{cases}$$

4. En déduire les coordonnées du point P, intersection de la droite  $\mathcal{T}$  et de la droite  $\mathcal{D}$ .

On appelle  $\mathcal{K}$  la courbe décrite par le point P lorsque  $\theta$  parcourt  $[0, 2\pi[$ . Sur cette même figure, on ajoute le cercle  $\mathcal{C}'$  de diamètre [OB], le point M', autre intersection de la droite (OM) et du cercle  $\mathcal{C}$ , et la tangente  $\mathcal{T}'$  au cercle  $\mathcal{C}$  en M'. La droite (BP) coupe la tangente  $\mathcal{T}'$  en P' et le cercle  $\mathcal{C}'$  en U (voir la figure ci-dessous).



5. Montrer que les droites  $\mathcal{T}$ , (OU) et  $\mathcal{T}'$  sont parallèles.
6. Montrer que  $UP = UP' = 1$ .
7. Montrer le point P' appartient à la courbe  $\mathcal{K}$ . Si  $\theta$  est le paramètre associé à P, quel est le paramètre correspondant pour P'?
8. Déduire de ce qui précède une nouvelle construction des points de la courbe  $\mathcal{K}$  n'utilisant que le cercle  $\mathcal{C}'$  et le point B.