C O N C O U R S A T S
-SESSION 2021-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels, et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille 3×1 à coefficients réels. Pour tous réels a et b, on définit la matrice

$$P(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

On définit par ailleurs l'ensemble de matrices suivant :

$$F = \left\{ P(a,b) : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On pose enfin

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Étude de l'ensemble F et de la matrice N

1. Démontrer que les matrices I_3 et N appartiennent à l'ensemble F.
2. Montrer que l'ensemble F forme un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I_3, N) est une base de F.
3. Donner deux réels a et b tels que $N^2 = aI_3 + bN$. Quelles sont les coordonnées de N^2 dans la base (I_3, N) ?
4. (a) Montrer que N est inversible, que son inverse N^{-1} appartient à l'ensemble F et donner les coordonnées de N^{-1} dans la base (I_3, N) de F. *Indication : on pourra utiliser la question précédente.*

   (b) Le réel 0 est-il valeur propre de N ?
5. Justifier que N est diagonalisable. *Cette question n'exige aucun calcul.*
6. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice N.

   (b) Montrer que N admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2 et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?

   (c) En déduire une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible vérifiant $N = PDP^{-1}$. *On ne cherchera à calculer ni la matrice P, ni son inverse P^{-1}.*
7. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $N^n = P(a_n, b_n)$ et que ces réels vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

On notera dans la suite de l'exercice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Déterminer une matrice diagonale B dont les termes diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible Q de taille 2×2 dont la deuxième ligne est $(1, 1)$, telles que $A = QBQ^{-1}$.
9. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n.
10. En déduire, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, une expression de N^n.

Partie B – Inversibilité des matrices de F

1. Soient b un réel et (x, y) un couple de réels. Montrer que

$$P(1, b)P(x, y) = P(x + 2by, bx + y + by) = P(x, y)P(1, b).$$

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet un inverse dans F si M est inversible et $M^{-1} \in F$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout réel b, la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F si et seulement si le système

$$\begin{cases} x = 1 - 2by \\ (1 + b - 2b^2)y = -b \end{cases}$$

admet une solution (x, y).
3. Montrer que la matrice $P(1, b)$ admet un inverse dans F si et seulement si $b \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}$.
4. Quelles sont les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(1, b)$ est inversible ?
5. Soit a un réel ***non nul***. Justifier que pour tout réel b, on a $P(a, b) = aP(1, b/a)$ et en déduire les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(a, b)$ est inversible.
6. Donner les valeurs de b pour lesquelles la matrice $P(0, b)$ est inversible. *Indication : on pourra utiliser le fait, prouvé en partie A, que la matrice N est inversible.*
7. Conclure en donnant l'ensemble des matrices de F qui ne sont pas inversibles.

Exercice 2

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |\cos x| - |\sin x|$.

1. (a) Montrer que f est périodique de période π.
   (b) Donner la parité de f.
2. Trouver la plus grande valeur de $a > 0$ pour laquelle l'égalité $f(x) = \cos x - \sin x$ est valable pour tout $x \in [0, a]$.
3. Calculer une constante C telle que

$$\cos(x) - \sin(x) = C \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

pour tout réel x. On utilisera cette écriture dans la suite.
4. En déduire la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
5. (a) Montrer que la série de Fourier Sf de la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$Sf(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2nx).$$

(b) Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur $\mathbb{R}$, en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

6. (a) Donner, pour tout entier $n \geqslant 1$, une expression de a_n en fonction de n, en détaillant les calculs. *Indication : on pourra utiliser le fait que pour tous réels a et b, on a*

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}.$$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel pair n, on a $a_n = 0$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel p, on a $a_{2p+1} = \dfrac{8}{\pi(4(2p+1)^2 - 1)}$.

7. En exprimant de deux manières $f(0)$, calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4(2p+1)^2 - 1}$.

8. (a) Énoncer le théorème de Parseval.

   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4(2p+1)^2 - 1)^2}$.

Exercice 3

Soit ω un paramètre réel positif. On considère l'équation différentielle suivante

$$xy''(x) + y'(x) + \omega^2 xy(x) = 0, \qquad (H_\omega)$$

d'inconnue une fonction réelle y définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. ***Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.***

Partie A – Étude du cas $\omega = 0$

1. Montrer que si y est une solution de (H_0) sur $]0\,,\infty[$, alors $z = y'$ est solution de l'équation différentielle

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x} = 0 \qquad (E)$$

   sur $]0\,,\infty[$.

2. (a) Résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $]0\,,\infty[$.

   (b) En déduire les solutions de (H_0) sur $]0\,,\infty[$.

3. Résoudre l'équation différentielle (H_0) sur l'intervalle $]-\infty\,,0[$.

4. Quelles sont les solutions de (H_0) sur $\mathbb{R}$?

Partie B – Étude du cas $\omega > 0$

Dans toute cette partie, on suppose $\omega > 0$.

1. Montrer qu'une solution y de (H_ω) définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $y'(0) = 0$.

On cherche à présent les séries entières $y(x) = \sum a_n x^n$ solutions de (H_ω) sur l'intervalle $]-R\,,R[$, où $R > 0$ désigne le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

2. Que vaut a_1 ?

3. (a) Montrer que la suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = -\frac{\omega^2 a_n}{(n+2)^2}.$$

   (b) En déduire la valeur de a_{2n+1}, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{2^{2n} n!^2} a_0.$$

4. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}x^{2n} = 0$.

   (b) En déduire le rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n$.

Partie C – Calcul approché

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}.$$

Pour tout réel a, l'unique entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p - 1 < a \leqslant p$ est appelé la ***partie entière supérieure*** de a, et on le note $\lceil a \rceil$. De manière équivalente, $\lceil a \rceil$ est le plus petit entier qui soit supérieur ou égal à a.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On note $n_x = \lceil |x| - 1 \rceil$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=n_x}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2}$ vérifie la règle spéciale des séries alternées.

Dans la suite, on admet que le résultat de la question précédente implique que

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!^2} \right| \leqslant \frac{x^{2(N+1)}}{(N+1)!^2}$$

pour tout entier $N \geqslant n_x$.

2. La fonction `fapprox` ci-dessous prend en entrée un réel x non nul, un réel strictement positif ε, et renvoie une approximation de $f(x)$ à ε près, c'est-à-dire un réel y tel que $|f(x) - y| \leqslant \varepsilon$. Recopier la fonction `fapprox` (en version *Scilab* ou bien pseudo-code) et la compléter.
Note : les fonctions « valeur absolue » et « partie entière supérieure » s'écrivent respectivement `abs` *et* `ceil` *en Scilab.*

```
function y = fapprox(x, eps)
  nx = ceil(abs(x) - 1)
  y = 0
  t = ...
  n = ...
  while ... | ...
    y = y + t
    n = n + 1
    t = -t * x^2 / n^2
  end
end
```

fonction FAPPROX(x, ε)
  $n_x \leftarrow \lceil |x| - 1 \rceil$
  $y \leftarrow 0$
  $t \leftarrow$ ...
  $n \leftarrow$ ...
  tant que ... **ou** ...
    $y \leftarrow y + t$
    $n \leftarrow n + 1$
    $t \leftarrow -tx^2/n^2$
  fin tant que
  renvoyer y
fin fonction

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{u}; \vec{v})$. On définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = 2z - z^2.$$

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A – Construction géométrique

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ de module $|z| = 1$, tel que $z \neq 1$. On introduit le point M d'affixe z, le point M_1 d'affixe $z_1 = z^2$, le point M_2 d'affixe $z_2 = 2z$ et le point N d'affixe $f(z)$.

1. Montrer que le quadrilatère $\mathrm{OM_1M_2N}$ est un parallélogramme.
2. Donner le module de z_1 et exprimer l'argument de z_1 en fonction de celui de z.
3. Déduire des questions précédentes une construction géométrique simple du point N.

Partie B – Tracé d'une courbe paramétrée

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{M}(t)$ le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ et $\mathrm{N}(t)$ le point d'affixe $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées cartésiennes du point $\mathrm{N}(t)$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$$

Le reste de cette partie se consacre à l'étude de la courbe paramétrée donnée par les fonctions x et y.

2. (a) Montrer que les fonctions x et y sont 2π-périodiques.
   (b) Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, montrer que le point $\mathrm{N}(-t)$ se déduit du point $\mathrm{N}(t)$ par une symétrie que l'on précisera.
   (c) Déduire des questions 2(a) et 2(b) un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0\,,\alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe paramétrée.
3. (a) Montrer que les fonctions x et y sont dérivables et déterminer les expressions de $x'(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t \in [0\,,\pi]$, puis étudier leur signe. *On rappelle les formules trigonométriques suivantes :*

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

   (b) Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle $[0\,,\pi]$. On y fera apparaître les valeurs de $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi\}$.
4. Montrer que pour tout réel $t \in \,]0\,,\pi]$, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{N}(t)}$ est orthogonal à la tangente à la courbe paramétrée en $\mathrm{N}(t)$.
5. Tracer la courbe paramétrée. On fera apparaître en particulier les points $\mathrm{N}(t)$ pour $t \in \{\pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$ ainsi que les tangentes en ces points.
6. Calculer la longueur de la courbe paramétrée, donnée par la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$