C O N C O U R S A T S
-SESSION 2019-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On note $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire identité. On se donne l'application linéaire $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$\begin{cases} s(e_1) = e_3 \\ s(e_2) = e_4 \\ s(e_3) = e_1 \\ s(e_4) = e_2 \end{cases}$$

et l'application linéaire p définie par $p = \dfrac{1}{2}(\mathrm{id} - s)$. L'objectif de cet exercice est de diagonaliser les applications linéaires s et p.

1. L'objectif de cette question est d'étudier s.
   (a) Donner la matrice S de s dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Montrer que S est diagonalisable (cette question n'exige aucun calcul).
   (c) Calculer S^2. Que peut-on en déduire sur s ?
   (d) Calculer le polynôme caractéristique de S.
   (e) Montrer que S admet deux valeurs propres, que l'on notera λ_1 et λ_2, et que l'on choisira telles que $\lambda_1 < \lambda_2$. Quels sont les ordres de multiplicité de λ_1 et λ_2 ?
   (f) On note E_1 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_1. Donner une base (u_1, u_2) de E_1, telle que les coordonnées des vecteurs u_1 et u_2 soient égales à 0, 1 ou -1.
   (g) On note E_2 le sous-espace propre de l'endomorphisme s associé à la valeur propre λ_2. Donner une base (u_3, u_4) de E_2, telle que les coordonnées des vecteurs u_3 et u_4 soient égales à 0 ou 1.
   (h) Trouver une matrice D_1 diagonale et une matrice inversible Q_1 telles que $S = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_1^{-1}.
2. L'objectif de cette question est d'étudier p.
   (a) Donner la matrice P de p dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Calculer $p \circ p$. Que peut-on en déduire sur p ?
   (c) Calculer $p(u_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
   (d) Montrer que l'application linéaire p est diagonalisable.
   (e) Trouver une matrice D_2 diagonale et une matrice inversible Q_2 telles que $P = Q_2 D_2 Q_2^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_2^{-1}.
3. On considère maintenant l'application linéaire $f = 3s + 4p$.
   (a) Donner la matrice F de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) En faisant le moins de calcul possible, trouver à l'aide des résultats précédents une matrice D_3 diagonale et une matrice inversible Q_3 telles que $F = Q_3 D_3 Q_3^{-1}$. On ne demande pas de calculer Q_3^{-1}.

Exercice 2

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch} t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} t = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. (a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   (b) Montrer que les fonctions ch et sh sont dérivables, et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}' t = \mathrm{sh}\, t$ et $\mathrm{sh}' t = \mathrm{ch}\, t$.
   (c) Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\mathrm{ch}\, t)^2 - (\mathrm{sh}\, t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\mathrm{ch}\, t)^2$ et $(\mathrm{sh}\, t)^2$.
2. Tracer les tableaux de variations des fonctions ch et sh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de ch et sh en 0.
3. (a) En se basant sur les variations de sh, montrer que l'équation $\mathrm{sh}\, t = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.
   (b) On pose $z = \mathrm{e}^{\alpha}$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.
   (c) En déduire la valeur exacte de α.
   (d) Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
4. Montrer que $\mathrm{ch}\, \alpha = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\alpha} (\mathrm{sh}\, t)^{2n}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_0 = \alpha$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive (*indication : on pourra remarquer que pour tout* $t \in [0\,,\alpha]$, *on a* $0 \leqslant \mathrm{sh}\, t \leqslant 1$). En déduire qu'elle est convergente.
3. (a) En remarquant que $(\mathrm{sh}\, t)^{2n+2} = (\mathrm{sh}\, t)^{2n+1}\, \mathrm{sh}\, t$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \mathrm{ch}\, \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right) I_n$.
   (c) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie C – Algorithmique

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

1. On souhaite obtenir un encadrement du réel α, solution de l'équation $\mathrm{sh}\, \alpha - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Scilab* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie deux réels a et b vérifiant $a \leqslant \alpha \leqslant b$ et $b - a \leqslant \varepsilon$.

```
function [a, b] = dicho(eps)
  a = ...
  b = ...
  while ......
    c = (a+b)/2
    if ...... then a = c
              else b = c
    end
  end
endfunction
```

   Note : la fonction sh *s'écrit* `sinh` *en Scilab.*

2. En utilisant la fonction précédente sur machine, on trouve 0,881 comme valeur approchée de α. On rappelle de plus que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$I_0 = \alpha, \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

Écrire une fonction, en *Scilab* ou bien en pseudo-code, qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie une valeur approchée de I_n.

Exercice 3

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère le carré $\mathscr{D}$ défini par

$$\mathscr{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \leqslant 2 \text{ et } |x-y| \leqslant 2\right\}.$$

On s'intéresse à la fonction de deux variables $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathscr{D}, \qquad f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) - x.$$

1. On s'intéresse tout d'abord à la nature de l'ensemble $\mathscr{D}$.
   (a) Tracer dans le plan $\mathbb{R}^2$ les quatre droites d'équations $x+y=2$, $x+y=-2$, $x-y=2$ et $x-y=-2$. Sur la même figure, indiquer l'ensemble $\mathscr{D}$.
   (b) Montrer que si (x,y) appartient à $\mathscr{D}$, alors $(x,-y)$ appartient encore à $\mathscr{D}$. Quelle symétrie possède l'ensemble $\mathscr{D}$?
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathscr{D}$ possède une symétrie centrale que l'on déterminera.
   (d) Répondre sans donner de démonstration aux questions suivantes : l'ensemble $\mathscr{D}$ est-il ouvert dans $\mathbb{R}^2$? Est-il fermé dans $\mathbb{R}^2$?
2. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes sur l'ensemble $\mathscr{D}$.
3. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'ensemble $\mathscr{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathscr{O} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| < 2 \text{ et } |x-y| < 2\right\}.$$

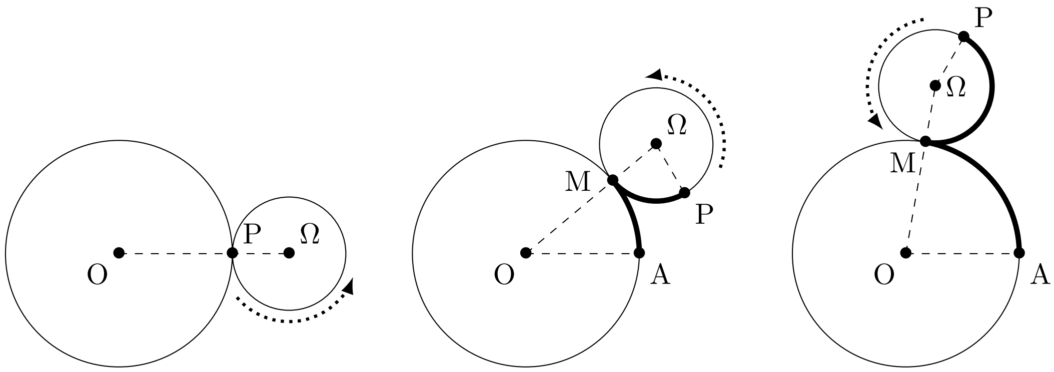
   (a) Déterminer le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y)$ de f en tout point (x,y) de $\mathscr{O}$.
   (b) Montrer que $(1,0)$ est l'unique point critique de la fonction f dans $\mathscr{O}$.
   (c) Sans calculer les deux dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, montrer qu'elles sont néanmoins égales pour tout $(x,y) \in \mathscr{O}$. Vous utiliserez un théorème bien choisi que vous énoncerez et dont vous vérifierez les hypothèses.
   (d) Pour $(x,y) \in \mathscr{O}$, donner une expression des dérivées partielles secondes notées

$$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \quad s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

   (e) Donner les valeurs de r, s et t au point $(1,0)$. L'évaluation de la fonction $rt - s^2$ au point $(1,0)$ permet-elle de conclure sur la nature du point critique $(1,0)$?
   (f) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$.
   (g) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $t \mapsto f(1+t,0) - f(1,0)$ au voisinage de 0. Le point critique $(1,0)$ est-il un extremum local de f ?

Exercice 4

Dans cet exercice, on étudie la trajectoire d'un point P fixé sur un cercle de rayon 1/2 qui roule sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de rayon 1. La figure ci-dessous représente trois instants de ce mouvement. On remarquera que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{MP}}$.



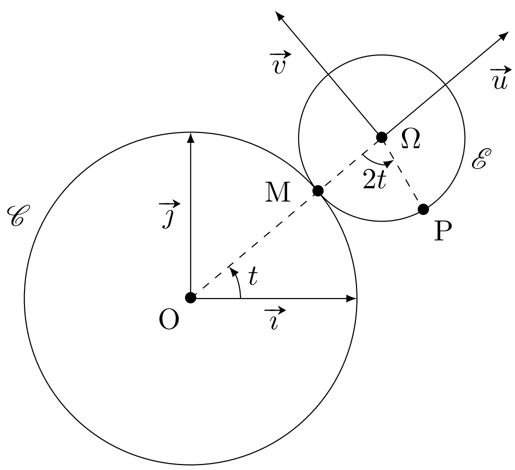
Les parties A et B peuvent se traiter de manière indépendante.

Partie A – Étude de la trajectoire du point P

1. Justifier que sur les figures ci-dessus, les angles $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{P}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ satisfont l'égalité $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{P}}\right) = 2\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

Afin d'étudier la trajectoire du point P, on munit le plan d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Pour $t \in \mathbb{R}$, on considère le point M de coordonnées $(\cos t, \sin t)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$. On note alors $\mathscr{E}$ le cercle de rayon 1/2 extérieurement tangent au cercle $\mathscr{C}$ en M. Le centre du cercle $\mathscr{E}$ est noté Ω. D'après la question 1, le point P est le point du cercle $\mathscr{E}$ tel que $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{M}}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{P}}\right) = 2t$. Enfin, on considère le repère $\mathscr{P} = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où

$$\begin{cases} \vec{u} = \cos(t)\,\vec{\imath} + \sin(t)\,\vec{\jmath} \\ \vec{v} = -\sin(t)\,\vec{\imath} + \cos(t)\,\vec{\jmath} \end{cases}$$



2. Donner les coordonnées du point Ω dans le repère $\mathscr{R}$.
3. Démontrer que le repère $\mathscr{P}$ est orthornormal.
4. Démontrer que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{P}$ sont

$$\left(-\frac{\cos(2t)}{2}, -\frac{\sin(2t)}{2}\right).$$

5. Soit un point N du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $\mathscr{P}$. Démontrer que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

6. En déduire que les coordonnées du point P dans le repère $\mathscr{R}$ sont

$$\left(3\cos t - 2(\cos t)^3, 2(\sin t)^3\right).$$

Partie B – Tracé de la courbe décrite par le point P

Cette partie peut être traitée même si la partie A n'a pas été abordée. On souhaite à présent tracer la courbe notée $\mathscr{N}$ et décrite par le point P. On considère donc les fonctions x et y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$x(t) = 3\cos t - 2(\cos t)^3 \quad \text{et} \quad y(t) = 2(\sin t)^3$$

de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{P}(t) = (x(t), y(t))$.

1. Montrer que les fonctions x et y sont périodiques et préciser leurs périodes.
2. Montrer que pour tout réel t, les points $\mathrm{P}(t+\pi)$ et $\mathrm{P}(-t)$ se déduisent du point $\mathrm{P}(t)$ par des symétries à préciser. En déduire un intervalle I de longueur minimale et de la forme $[0\,, \alpha]$ avec $\alpha > 0$ pour l'étude de la courbe $\mathscr{N}$.
3. Dresser le tableau de variation conjoint des fonctions x et y sur l'intervalle I. On y fera apparaître les valeurs de $x(t), x'(t), y(t)$ et $y'(t)$ pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$.
4. Donner une représentation graphique de la courbe $\mathscr{N}$ en y faisant apparaître pour $t \in \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ les points $\mathrm{P}(t)$ et les tangentes en ces points. On admettra que la tangente au point $\mathrm{P}(0)$ est horizontale.