

C O N C O U R S A T S
-SESSION 2014-

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CALCULATRICE INTERDITE

CODE ÉPREUVE : 956

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3H

Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.*

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 avec la base :

$$\mathcal{B} = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

On notera par une matrice unicolonne les composantes d'un vecteur de E dans une base.

Ainsi la matrice unicolonne des composantes de $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} est $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de

E défini par $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Donner la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

2. Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique $P_{\mathbf{A}}$.

3. Montrer que \mathbf{A} admet deux valeurs propres distinctes λ et μ à calculer. (Choisir $\lambda < \mu$).
Quelles sont les multiplicités de λ et μ comme racines de $P_{\mathbf{A}}$?

4. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base \mathcal{B} des vecteurs de base du sous espace propre \mathcal{E}_{λ} . On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base \mathcal{B} des vecteurs de base du sous espace propre \mathcal{E}_{μ} . On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

6. Peut-on déduire de ce qui précède que \mathbf{A} est diagonalisable ?

7. En déduire une matrice inversible \mathbf{P} et une matrice diagonale \mathbf{D} telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$.

[Ne pas calculer \mathbf{P}^{-1}]

Partie B

1. Donner la matrice de g dans la base \mathcal{B} .

2. Soit la matrice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer son polynôme caractéristique $P_{\mathbf{B}}$.

3. Montrer que \mathbf{B} admet trois valeurs propres distinctes, 0 et α , β . (Choisir $\alpha < \beta$)

Quelles sont les multiplicités de 0, de α et de β , comme racines de $P_{\mathbf{B}}$?

4. Déterminer la matrice unicolonne des composantes \mathbf{V}_0 dans la base \mathcal{B} d'un vecteur de base v_0 du sous espace propre \mathcal{E}_0 . On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer la matrice unicolonne des composantes \mathbf{V}_α dans la base \mathcal{B} d'un vecteur de base v_α du sous espace propre \mathcal{E}_α . On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

6. Déterminer la matrice unicolonne des composantes \mathbf{V}_β dans la base \mathcal{B} d'un vecteur de base v_β du sous espace propre \mathcal{E}_β . On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

7. Peut-on déduire de ce qui précède que \mathbf{B} est diagonalisable ? Justifier.

8. Soit la famille de vecteurs $\mathcal{B}_2 = (v_0, e_1, v_\alpha, v_\beta)$. Montrer que \mathcal{B}_2 est une base de \mathcal{E} .

9. Calculer les composantes des images par g des vecteurs de \mathcal{B}_2 , d'abord dans la base \mathcal{B} , puis dans la base \mathcal{B}_2 .

10. En déduire l'expression de la matrice \mathbf{C} de g dans la base \mathcal{B}_2 .

Exercice 2

On considère les fonctions 2π -périodiques, f et g définies par :

$$\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = |x| \text{ et } g(x) = x.$$

1.a. Préciser la parité de f ;

1.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction f . On note Sf la somme de la série de Fourier.

2.a. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction f sur \mathbb{R} , en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

2.b. En calculant $Sf(0)$, trouver la somme de la série numérique : $T = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

3. Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b non nuls tels que $S = aS + bT$.

4. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique S .

5. Appliquer la relation de Parseval à Sf et trouver la somme de la série numérique :

$$V = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

6.a. Soit $U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Montrer qu'il existe deux réels c et d non nuls tels que $U = cU + dV$.

6.b. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique U .

7.a. Préciser la parité de g .

7.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction g . On note Sg la somme de la série de Fourier.

8. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction g sur \mathbb{R} , en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

9. En calculant $Sg\left(\frac{\pi}{2}\right)$, trouver la somme de la série numérique $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

10. Appliquer la relation de Parseval à Sg et retrouver la somme de la série numérique :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

11. Montrer que $\forall x \in [0, \pi[$, $-2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$.

On considère la fonction 2π -périodique, h définie par :

$$\forall x \in]-\pi, 0], h(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, \pi], h(x) = x.$$

12. Exprimer h à l'aide de f et g .

13. En déduire sans aucun calcul la série de Fourier de h .

Exercice 3

On considère l'équation différentielle, définie pour $x \in]0, +\infty[$, de fonction inconnue y :

(E) : $xy'(x) - y(x) = \text{Arctan}(x)$ et l'équation homogène associée (H) : $xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminer la solution générale de (H).

2. Montrer que la résolution de (E) peut se ramener à calculer l'intégrale :

$$K(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(u)}{u^2} du \text{ pour } x \in]0, +\infty[.$$

Justifier que cette intégrale est convergente.

3. Par une intégration par parties, exprimer $K(x)$ à l'aide de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

4. Déterminer trois réels α, β, γ tels que : $\forall u \in \mathbb{R}^*$, $F(u) = \frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta u + \gamma}{u^2+1}$.

5. En déduire le calcul de l'intégrale $K(x)$, puis la solution générale y de (E), en fonction d'une constante d'intégration C .

6. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x)$ existe et calculer cette limite.

Exercice 4

Soit la courbe C de représentation paramétrique dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos \alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ On note } \mathbf{M}(\alpha) \text{ le point de paramètre } \alpha \text{ de } C.$$

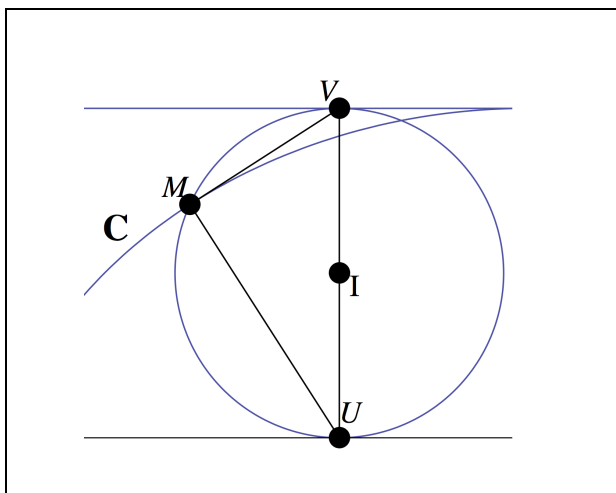
- 1.a.** Préciser la parité des fonctions x et y . En déduire une symétrie pour la courbe C .
- 1.b.** Donner les coordonnées du milieu du segment $[\mathbf{M}(\alpha), \mathbf{M}(2\pi - \alpha)]$. En déduire une symétrie pour la courbe C .
- 1.c.** Donner les composantes du vecteur $\overline{\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{M}(\alpha+2\pi)}$. Montrer qu'il existe des translations à préciser qui laissent la courbe C invariante.
- 1.d.** Déduire de ce qui précède toutes les symétries de la courbe C .
- 2.a.** Faire une étude conjointe des fonctions x et y sur $[0, 2\pi]$. (dérivée, extrema, sens de variation, tableau de variation.)
- 2.b.** Déterminer la limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{y(\alpha)}{x(\alpha)}$. On admettra qu'il en résulte que C admet une tangente

verticale en $\mathbf{M}(0)$.

- 2.c.** Donner une représentation graphique de C pour $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose maintenant que $\alpha \in]0, \pi[$. On note \mathbf{M} le point $\mathbf{M}(\alpha)$ de C .

- 3.a.** Donner les composantes d'un vecteur directeur \vec{t} de la tangente \mathbf{T} à C en \mathbf{M} , et d'un vecteur directeur \vec{n} de la normale \mathbf{N} à C en \mathbf{M} .



- 3.b.** Donner une équation de la droite \mathbf{N} normale à C en \mathbf{M} . Déterminer les coordonnées du point \mathbf{U} , intersection de \mathbf{N} avec l'axe $(\mathbf{O}x)$.

- 3.c.** Donner une équation de la droite \mathbf{T} tangente à C en \mathbf{M} . Déterminer les coordonnées du point \mathbf{V} , intersection de \mathbf{T} avec la droite d'équation $y = 2$.

- 3.d.** Que remarque-t-on sur les abscisses des points \mathbf{U} et \mathbf{V} ?

On appelle \mathbf{I} le milieu du segment $[\mathbf{UV}]$.

- 4.a.** Montrer que le cercle de centre \mathbf{I} et de rayon 1 contient \mathbf{U} , \mathbf{V} et \mathbf{M} .

- 4.b.** Donner les composantes du vecteur $\overline{\mathbf{IM}}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{\mathbf{IU}, \mathbf{IM}}$.

- 4.c.** Comparer la longueur de l'arc de cercle $\widehat{\mathbf{UM}}$ (situé sous la droite (\mathbf{UM})) et la longueur du segment $[\mathbf{OU}]$. (\mathbf{O} est l'origine du repère).

