

---

# Mathématiques

---

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.*

*La calculatrice personnelle est interdite.*

## Exercice 1

On veut calculer les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -3u_n + v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n + 4w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 2w_n \end{cases} . \text{ On pose } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} . \text{ On se place dans l'espace vectoriel}$$

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  des matrices réelles à 3 lignes et une colonne.

1. Déterminer la matrice carrée  $\mathbf{A}$  telle que  $X_{n+1} = \mathbf{A}X_n$ .

2. Donner une expression de  $X_n$  en fonction de  $\mathbf{A}$ ,  $n$  et  $X_0$ .

3. Montrer que  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de la matrice  $\mathbf{A}$ . Donnez la valeur propre,  $\lambda_1$  qui

lui est associée.

4.a. Déterminer le polynôme caractéristique  $P_{\mathbf{A}}$  de la matrice  $\mathbf{A}$ .

b. Montrer que la matrice  $\mathbf{A}$  admet trois valeurs propres distinctes  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  à déterminer, avec  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ . [ $\lambda_1$  est la valeur propre trouvée à la question 3]

c. Déterminer un vecteur propre de  $\mathbf{A}$  associé à la valeur propre  $\lambda_2$  de la forme  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ .

d. Déterminer un vecteur propre de  $\mathbf{A}$  associé à la valeur propre  $\lambda_3$  de la forme  $E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ .

5. Soit  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ . Déterminer une matrice inversible  $\mathbf{P}$  telle que  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ . On ne

demande pas de calculer  $\mathbf{P}^{-1}$ .

6. Exprimer pour tout entier naturel  $n$  la matrice  $\mathbf{A}^n$  à l'aide de  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}$ , et  $\mathbf{P}^{-1}$  et  $n$ . En déduire que pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $\mathbf{A}^{2k-1} = \mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{A}^2$ . Calculer  $\mathbf{A}^2$ .

7.a On suppose que  $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Déduire de ce qui précède l'expression de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et

$(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

7.b. Montrer que dans ce cas, les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont constantes à partir d'un certain rang à préciser. Quelles sont les limites des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

8. On suppose ici que  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Exprimer en fonction de la parité de  $n$  l'expression des suites

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Préciser lesquelles n'ont pas de limite.

9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $u_0, v_0, w_0$  pour que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent. Quelles sont alors les limites de ces suites ?

## Exercice 2

Soit la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ .  $\varphi^{(n)}$  désigne sa dérivée  $n$ -ième, avec  $\varphi^{(0)} = \varphi$ .

1) Montrer par récurrence sur  $n$  qu'il existe une suite de fonctions polynômes  $P_n$  telles que  $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(x) \varphi(x)$ . Calculer  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .

2) Montrer par récurrence sur  $n$  la relation  $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_n'(x)$ . En déduire que  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$ , de même parité que  $n$ , de coefficient dominant  $a_n = 1$ .

3) Calculer  $P_3(x)$  et  $P_4(x)$ .

4) Montrer que  $P_4(x)$  admet quatre racines réelles. Calculer ces racines.

5) On pose  $\varphi_n(x) = P_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}} = (-1)^n \varphi^{(n)}(x) = -\varphi_{n-1}'(x)$  avec  $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ .

a- Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_n(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = 0$ . En déduire que pour

$n > 0$ , on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = 0$ .

b- Soient deux entiers  $k$  et  $n$ , avec  $0 < k \leq n$ . En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = k \int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-1} \varphi_{n-1}(x) dx.$$

c- Montrer que pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = k! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-k}(x) dx$ . En déduire que

$$\text{- si } k < n, \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = 0,$$

$$\text{- si } k = n, \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \varphi_n(x) dx = A n! \text{ avec } A = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx > 0. \text{ [Ne pas chercher à calculer A.]}$$

d- Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) \varphi_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) P_n(x) e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0$  si  $m < n$  et que  $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n^2(x) e^{\frac{-x^2}{2}} dx = A n!$

## Exercice 3

Soit les fonctions  $f$  et  $F$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies par  $f(t) = e^{-|t|}$  et  $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-n)$  (1).

1) Soit  $t \in [0, 1]$ . Justifier la convergence des séries puis calculer les sommes de

$$G(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(t-n) \text{ et } H(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(t-n) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(t+k).$$

2) Montrer que pour  $t \in [0, 1]$   $F(t) = H(t) + e^{-|t|} + G(t) = A(e^t + e^{-t}) + e^{-t}$  (2) avec  $A = \frac{1}{e-1}$ .

3) Montrer, à partir de la définition (1), que  $F(t)$  est paire et de période 1.

- 4) A l'aide de la formule (2), calculer  $F(0)$  et  $F(1)$ . En déduire que  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 5) Montrer que pour tout réel  $a$ , une primitive de  $e^t \cos(at)$  est  $\frac{e^t}{1+a^2}(\cos(at) + a \sin(at))$ , et qu'une primitive de  $e^{-t} \cos(at)$  est  $\frac{e^{-t}}{1+a^2}(-\cos(at) + a \sin(at))$ .
- 6) Montrer que la somme de la série de Fourier de  $F$  peut s'écrire  $S(t) = a_0 + \sum_1^{+\infty} a_n \cos(2\pi n t)$ .
- 7) Déduire de ce qui précède la valeur de  $a_0$  et de  $a_n$  en fonction de  $n$ . [Il est bon de remarquer que  $\sin(\pi n)$  s'annule pour tout  $n$  entier.]
- 8) Expliquer à l'aide d'un théorème pourquoi la série de Fourier  $S(t)$  est convergente. Quelle est sa somme ?
- 9) En déduire la valeur de la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$ .
- 10) Soit  $M = \int_0^1 F^2(t) dt$ . On ne demande pas de calculer  $M$ . Exprimer à l'aide de  $M$  la valeur de la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+4\pi^2 n^2)^2}$  en justifiant votre réponse.

#### Exercice 4

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  on considère la courbe  $\mathcal{P}$  de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}, t \text{ étant un paramètre réel.}$$

1. Reconnaître la nature de cette courbe.
  2. Donner les composantes d'un vecteur tangent  $\vec{T}(t)$  et d'un vecteur normal  $\vec{N}(t)$  au point  $M(t)$  de paramètre  $t$  de la courbe  $\mathcal{P}$ .
- On considère deux points quelconques  $A$  et  $B$  de cette courbe qui correspondent respectivement à deux valeurs distinctes  $a$  et  $b$  du paramètre  $t$ .
3. Donner une équation de la droite  $T_A$  tangente au point  $A$  à la courbe  $\mathcal{P}$ . Déterminer les coordonnées de l'intersection  $A'$  de  $T_A$  avec l'axe des abscisses.
- De même, donner une équation de la tangente  $T_B$  au point  $B$  à la courbe  $\mathcal{P}$  et Déterminer les coordonnées de l'intersection  $B'$  de  $T_B$  avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer les coordonnées du point  $I$  milieu du segment  $[AB]$ .
  5. Déterminer les coordonnées du point  $M$ , point d'intersection des deux tangentes  $T_A$  et  $T_B$ .
  6. Comparer les ordonnées des points  $I$  et  $M$ .
  7. Déterminer les coordonnées du point  $C$  qui appartient à la courbe  $\mathcal{P}$  et dont l'ordonnée est égale à celle de  $I$ .
  8. Démontrer que la tangente  $T_C$  en  $C$  à la courbe  $\mathcal{P}$  est parallèle à la droite  $(AB)$
  9. Pour  $a=-1$  et  $b=2$ , faire une figure comportant  $\mathcal{P}, A, B, A', B', [AB], T_A = (AA'), T_B = (BB'), I, M, C, T_C$ .