
Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.*

Exercice 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire et 2π -périodique telle que : $\forall x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

1. On suppose de plus que f est définie sur \mathbb{R} . En déduire $f(0)$.
2. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-\pi, 3\pi]$. On précisera sur cette figure la valeur de f aux points de discontinuité.

3. Calculer la série de Fourier de la fonction f . Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Soit la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire et 2π -périodique telle que : $\begin{cases} \forall x \in]0, 1], g(x) = xf(1) \\ \forall x \in]1, \pi], g(x) = f(x) \end{cases}$

4. Représenter la fonction g sur $[-\pi, 3\pi]$.
5. Calculer $\int_0^1 x \sin(nx) dx$, puis $\int_0^\pi (g(x) - f(x)) \sin(nx) dx$. En déduire la série de Fourier g .
6. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n) \sin(nx)}{n^2}$.
7. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$. Exprimer ces sommes à l'aide de π .
8. En appliquant la relation de Parseval à la fonction g , calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4}$.

Exercice 2

Partie A

Soit un espace vectoriel euclidien \mathcal{E} de dimension 3 de base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, f un

endomorphisme de matrice \mathbf{A} dans la base \mathcal{B} , et une matrice \mathbf{S} avec $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Soient la famille de vecteurs $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ ayant pour composantes dans la base

$\mathcal{B} : \vec{i}' : (1, 2, 2), \vec{j}' : (2, -2, 1), \vec{k}' : (2, 1, -2)$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une base orthogonale de \mathcal{E} .
- 2) Montrer que $\mathbf{S}^2 = \mathbf{S.S} = 9\mathbf{I}$, (\mathbf{I} étant la matrice de l'identité de \mathcal{E}). En déduire l'inverse de \mathbf{S} .
- 3) Montrer que $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ sont des vecteurs propres de \mathbf{A} . Préciser les valeurs propres associées ainsi que la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' . Trouver une matrice diagonale \mathbf{D} telle que

$$(1) \quad \mathbf{A} = \mathbf{S.D.S}$$

En déduire, sans calcul explicite de produit matriciel, que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A.A} = 81\mathbf{I}$.

Partie B

On considère trois fonctions (x, y, z) dérivables sur \mathbb{R} vérifiant le système différentiel :

$$(SD) \begin{cases} x'(t) = 7x(t) - 4y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + y(t) - 8z(t) \\ z'(t) = -4x(t) - 8y(t) + z(t) \end{cases}, \text{ avec la condition initiale (CI) } (x(0), y(0), z(0)) = (9, 0, 9)$$

Dans un espace affine \mathcal{A} de dimension 3, on sera amené à utiliser le repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathbf{O}; \mathcal{B}) = (\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ainsi que le repère orthogonal $\mathcal{R}' = (\mathbf{O}; \mathcal{B}') = (\mathbf{O}; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

- 1) Montrer que (SD) peut s'écrire $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t)$ en précisant ce qu'est $\mathbf{X}(t)$.
- 2) Soit la matrice colonne $\mathbf{U}(t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{X}(t)$, avec $\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathbf{U}(t)$ vérifie un système différentiel simple (calculer $\mathbf{U}'(t)$ et utiliser l'équation (1) du A3). Préciser la condition initiale $\mathbf{U}(0)$.
- 3) Calculer $\mathbf{U}(t)$. Si dans le repère orthonormé \mathcal{R}' , \mathbf{m}_t est le point de coordonnées $(u(t), v(t), w(t))$ déterminer un vecteur (constant) $\vec{n} \in \mathcal{E}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \vec{n} \perp \overline{\mathbf{O}\mathbf{m}_t}$.
- 4) Dédurre de ce qui précède l'unique fonction $\mathbf{X}(t)$ vérifiant (SD) et (CI). Si dans le repère \mathcal{R} , \mathbf{M}_t est le point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ déterminer un vecteur (constant) $\vec{N} \in \mathcal{E}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \vec{N} \perp \overline{\mathbf{O}\mathbf{M}_t}$.
- 5) Pour $t \in \mathbb{R}$ le point \mathbf{M}_t de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ décrit la courbe \mathcal{H} . Montrer que \mathcal{H} est incluse dans un plan dont on donnera une équation cartésienne.
- 6) Représenter graphiquement dans le repère $(\mathbf{O}; \vec{i}', \vec{j}')$ la courbe de représentation paramétrique $(u(t), v(t))$. Quelle est la nature de cette courbe? Quel est son rapport avec la courbe \mathcal{H} ?

Exercice 3

Les questions 3) et 4) sont indépendantes des questions 1) et 2)

Soit $f(x) = \int_0^{x/2} \frac{dv}{\cos(v)}$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.

1.a) Calculer $f'(x)$. Montrer que f est impaire et strictement croissante.

1.b) Donner un équivalent simple de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$ au voisinage de 0. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \int_{\frac{\pi-x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sin v} = +\infty, \text{ et que } f \text{ est une bijection de }]-\pi, \pi[\text{ vers } \mathbb{R}.$$

On note $g = f^{-1}$ et donc dans leurs domaines de définition on a $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.

2) a) Montrer que $g'(y) = 2 \cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)$. Calculer $g''(y)$.

b) Montrer que $g(t)$ est solution de l'équation différentielle en t :

$$X''(t) + \sin(X(t)) = 0 \text{ avec } t \geq 0, X(0) = 0, X'(0) = a > 0$$

pour une valeur de a à préciser.

3) Calculer $h(t) = \int_0^t \frac{2du}{1-u^2}$ pour $t \in]-1, 1[$ [on utilisera la décomposition $\frac{2}{1-u^2} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u}$].

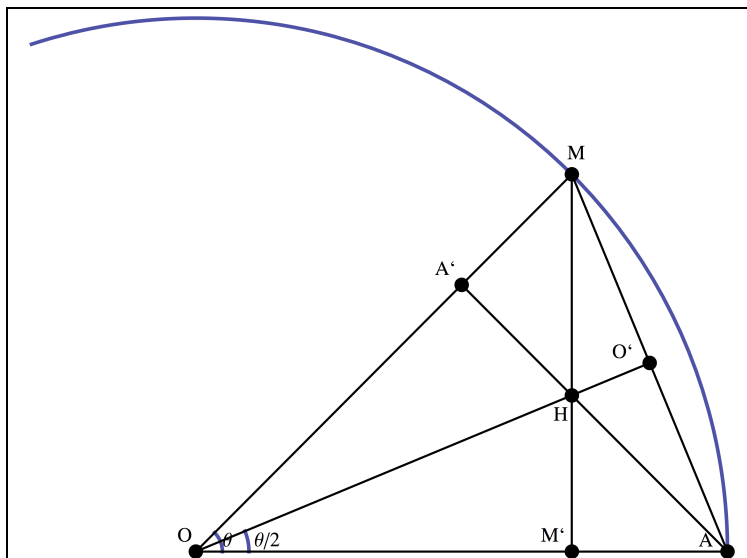
4) Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u = \tan\left(\frac{v}{2}\right)$.

a) Exprimer v en fonction de u , puis dv en fonction de u et du .

b) Montrer que $\cos(v) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ [Indication : on peut calculer d'abord $\cos^2\left(\frac{v}{2}\right)$].

c) Faire le calcul de l'intégrale définissant $f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4



Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle C , de centre O et de rayon 1. On note A le point de coordonnées $(1,0)$. Soit M un point du cercle C tel que $\theta = (\vec{i}, \overline{OM})$ avec $0 \leq \theta < \pi$, O' la projection orthogonale de O sur (AM) (c'est aussi le milieu de $[A,M]$), A' la projection orthogonale de A sur (OM) , M' la projection orthogonale de M sur (OA) . L'intersection des trois hauteurs (OO') , (AA') , (MM') est l'orthocentre H du triangle (OAM) .

1) Donner les coordonnées des points M , M' , O' en fonction de θ .

2) Montrer que les coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ du point H sont $\left(\cos(\theta), \cos(\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$.

(On conviendra que pour $\theta=0$, $H=A$)

3) Calculer $(x'(\theta), y'(\theta))$.

4) On rappelle que si on pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a : $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Montrer, en exprimant tout à l'aide de t , que $y'(\theta) = \cos \theta - \frac{1}{1 + \cos \theta}$. En déduire le signe de

$y'(\theta)$ pour $0 \leq \theta < \pi$. On notera θ_0 le réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos(\theta_0) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

5) Faire le tableau de variation conjoint de $(x(\theta), y(\theta))$ pour $0 \leq \theta < \pi$. On précisera les valeurs ou les limites de $x(\theta), y(\theta)$ et de $x'(\theta), y'(\theta)$ en 0 et π ainsi qu'aux extrema éventuels de x et y .

6) On appelle Γ la courbe paramétrée décrite par $(x(\theta), y(\theta))$. Montrer que Γ admet une asymptote verticale à préciser.

7) Donner une représentation graphique de Γ en plaçant l'asymptote, les points et les tangentes à ces points pour les valeurs $0, \theta_0, \frac{\pi}{2}$ de θ . [On prendra $\cos(\theta_0) \approx 0,62$ et $\cos(\theta_0) \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \approx 0,30$]

8) Montrer que les coordonnées (x, y) des points de la courbe Γ vérifient l'équation : $x(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$.