

# Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.  
La calculatrice personnelle est interdite.*

## Exercice 1

Rappel: la fonction arctan est une bijection strictement croissante de  $]-\infty, +\infty[$  vers  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , sa dérivée vérifie  $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x$

Soit un entier  $k > 0$  fixé et les fonctions  $f_k, g_k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par:

$$f_k : x \mapsto \arctan(x + k\pi) \text{ et } g_k(x) = f_k(x) - x.$$

1) Calculer  $f_k'(x)$  et montrer que  $\forall x > 0, 0 < f_k'(x) \leq \delta_k < 1$  pour une constante  $\delta_k$  à calculer en fonction de  $k$ .

2) Étudier les variations de  $g_k$  sur  $[0, +\infty[$ . En déduire l'existence d'un unique réel

$\theta_k \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  solution de l'équation  $\theta_k = f_k(\theta_k)$ .

3) On définit la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 0$ , et  $\forall n \geq 1, u_n = f_k(u_{n-1})$ .

a- Montrer que  $0 \leq \theta_k - u_n \leq \delta_k(\theta_k - u_{n-1})$ .

b- En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \theta_k$

c- Pour  $k=1$ , déterminer  $n$  pour que  $\theta_1 - u_n < 10^{-15}$

4) Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = \frac{\pi}{2}$  (comparer  $f_k(0)$  et  $\theta_k$ ).

5) Montrer que  $\forall x > 0, \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ . En déduire que si on pose

$$\tau_k = \frac{\pi}{2} - \theta_k, \text{ alors } \arctan\left(\frac{1}{(k+1/2)\pi}\right) \leq \tau_k \leq \arctan\left(\frac{1}{k\pi}\right).$$

6) Donner un équivalent de  $\tau_k$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  (s'exprimant simplement en fonction de  $k$ ).

## Exercice 2

*Les deux parties de cet exercice sont largement indépendantes.*

### Partie I

Soient deux réels  $p$  et  $q$ . On considère la matrice  $\mathbf{N}$  telle que :  $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer le polynôme caractéristique  $P_{\mathbf{N}}(x)$  de la matrice  $\mathbf{N}$ .

On rappelle qu'un polynôme  $P(x)$  admet une racine  $x_0$  double s'il existe un polynôme

$Q(x)$  tel que :  $P(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$  avec  $Q(x_0) \neq 0$ .

2) Montrer que si  $x_0$  est une racine double de  $P(x)$  alors  $x_0$  est aussi une racine du polynôme dérivé  $P'(x)$ .

On suppose qu'il existe un réel  $\alpha$  racine double du polynôme caractéristique  $P_N(x)$ .

3) Montrer que nécessairement  $p$  et  $q$  doivent vérifier la relation (R)  $4p^3 = 27q^2$ .

4) Déterminer les plus petits entiers positifs  $p$  et  $q$  qui vérifient (R)

## Partie II

Dans cette partie on prends  $p=3$  et  $q=2$ . La matrice  $\mathbf{N}$  est donc ici  $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Déterminer le polynôme caractéristique  $P_N(x)$  de cette matrice  $\mathbf{N}$ .

2) Déterminer les racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  du polynôme  $P_N(x)$ ,  $\lambda_1$  étant la racine négative. Préciser leurs multiplicités.

3) Déterminer une base de  $E_1$ , sous-espace propre de  $\mathbf{N}$  associé à la valeur propre  $\lambda_1$ .

4) Déterminer une base de  $E_2$ , sous-espace propre de  $\mathbf{N}$  associé à la valeur propre  $\lambda_2$ .

5) Quelles sont les dimensions des sous espaces propres  $E_1$  et  $E_2$ . La matrice  $\mathbf{N}$  est-elle diagonalisable ? (On précisera pourquoi.)

6) On pose  $\mathbf{M} = \mathbf{N} + \mathbf{I}$  où  $\mathbf{I}$  est la matrice de l'identité.

a) Calculer  $\mathbf{P} = \frac{1}{9}\mathbf{M}^2$

b) Calculer les valeurs propres et une base des sous-espaces propres de  $\mathbf{P}$ .

c) Montrer que  $\mathbf{P}$  est la matrice d'une projection.

d) Préciser les sous-espaces images et noyau de la matrice  $\mathbf{P}$ .

## Exercice 3

On rappelle que les fonctions  $\text{ch}$ ,  $\text{sh}$  sont définies par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ et que } e^{ni\pi} = (-1)^n$$

On considère la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $[-\pi, +\pi[$  par  $f(x) = e^x$ . Sa série de

Fourier est  $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ .

1) Calculer  $a_0$ . Donner son expression à l'aide de  $\text{sh}(\pi)$ .

2) Donner une primitive de la fonction  $x \mapsto e^{x(1+i n)}$ . On pose  $d_n = a_n + i b_n$ . Calculer les coefficients  $d_n$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  en fonction de  $a_0$  et  $n$ .

3) Justifier que la somme de la série  $S(x)$  existe pour tout  $x$ , et donner sa valeur pour  $x \in ]-\pi, +\pi[$ . Calculer  $S(\pi)$  et donner son expression à l'aide de  $f(x)$ .

4) Calculer  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$  en fonction de  $\frac{\text{ch}(\pi)}{\text{sh}(\pi)}$ .

5) Appliquer l'identité de Parseval et retrouver ainsi la somme calculée en 4).

### Exercice 4

Soit  $\mathcal{P}$  le plan muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère la courbe  $\mathcal{L}$  de

représentation paramétrique  $\begin{cases} x(t) = \frac{2t^3}{t^4 + 1} \\ y(t) = \frac{2t}{t^4 + 1} \end{cases}$ . Les points de cette courbe seront notés

$M(t)$  en prenant  $t$  dans  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  avec la convention que  $M(\infty)$  correspond à la limite de  $x(t)$  et  $y(t)$  en  $+\infty$  ou  $-\infty$

- 1) Montrer que la courbe  $\mathcal{L}$  admet une symétrie centrale par rapport à O.
- 2) En changeant  $t$  en  $\frac{1}{t}$  montrer que la courbe  $\mathcal{L}$  admet une autre symétrie et qu'ainsi on peut réduire l'étude de la courbe aux  $t$  de l'intervalle  $[0,1]$
- 3) Donner le tableau de variation conjoint des fonctions  $x$  et  $y$  sur l'intervalle  $[0,1]$
- 4) Donner sur votre copie le tableau de valeurs ci-dessous rempli en écrivant les résultats sous la forme de fractions écrites le plus simplement possible:

$t$	0	$1/2$	$1/\sqrt[4]{3}$	1
$x(t)$				
$y(t)$				
$x'(t)$				
$y'(t)$				

- 5) Préciser la limite de  $\frac{y(t)}{x(t)}$  quand  $t$  tend vers 0, puis quand  $t$  tend vers  $+\infty$
- 6) Représenter graphiquement la courbe  $\mathcal{L}$  dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}$ . (Choisir la longueur unité assez grande, de l'ordre de 8 à 10 cm). On placera les points  $M(0)$ ,  $M(1/2)$ ,  $M(1/\sqrt[4]{3})$ ,  $M(1)$  ainsi que les tangentes en ces points. On donne  $\sqrt[4]{3} \approx 1,3$  et  $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \approx 0,76$ . Sur cette courbe on surlignera la partie correspondant aux valeurs du paramètre sur l'intervalle  $[0,1]$

On considère l'application  $f$  du plan privé de l'origine dans le plan qui au point M de

coordonnées  $(x, y)$  associe le point N de coordonnées  $(X, Y)$  avec :

$$\begin{cases} X = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ Y = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

- 7) Déterminer l'ensemble C des points invariants de cette transformation, c'est à dire les points M du plan tels que  $f(M) = M$ .
- 8) Donner une représentation paramétrique  $(X(t), Y(t))$  de l'image par  $f$  de  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \setminus \{O\}$  (La courbe  $\mathcal{L}$  privée de l'origine du repère)
- 9) Calculer  $X(t) \times Y(t)$  et en déduire la nature de la courbe image.