

LES FRACTIONS

Niveau 2

1 Préliminaires

Quelques outils :

On aura besoin dans la suite de bien faire la différence entre les nombres pairs et les nombres impairs :

Les nombres pairs sont les $2n$

Les nombres impairs sont les $2n+1$

On utilisera aussi les factoriels : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$

Ainsi, par exemple, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

On aura aussi besoin des identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemples :

Exemple 1 : Montrons que le carré d'un nombre impair est impair :

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n + 2) + 1. (2n + 1)^2 \text{ est bien de la forme } 2m + 1 \text{ (avec ici } m = 2n + 2 \text{)}$$

C'est facile de développer, mais il faut s'entraîner un peu pour factoriser.

$$\text{Exemple 2 : } n^2 - 4 = (n + 2)(n - 2) \quad n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2 \quad n^2 - 6n + 9 = (n - 3)^2.$$

Exemple 3 : $a - ab$ n'est pas égal à b , mais plutôt : $a - ab = a(1 - b)$

Exemple 4 : On factorise $(x^2 - 6x + 9) + (x^2 - 3x)$ comme suit : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ et $x^2 - 3x = x(x - 3)$ donc $(x^2 - 6x + 9) + (x^2 - 3x) = (x - 3)^2 + x(x - 3) = (x - 3)(x - 3 + x) = (x - 3)(2x - 3)$

Exercices 1 à 5 : Développer les expressions suivantes :

$$(x - 5)^2; (3x + 1)^2; (2x - 1)^2; (a + 2b)^2; (2a - 3b)^2$$

Exercices 6 à 10 : n est un entier naturel non nul. Les nombres suivants sont-ils pairs ou impairs ?

$$6n + 7; (2n - 1)^2; (2n)^2 - 1; (n + 4)^2 - (n + 3)^2; n(n + 1)$$

Exercices 11 à 20 : Factoriser les expressions suivantes :

$$3x - 9; 9x^2 + 6x + 1; 16x^2 - 9; 3x^3 - 5x^2; (2n + 1)(n - 7) + 3n(4n + 2); x^2 + 2x + 1 - (3x + 2)(x + 1) \\ (x^2 - 10x + 25) + (x^2 - 5x); 9(4x^2 - 4x + 1) - 6x + 3; (x + 3)(2 - x) + x^2 + 6x + 9; (n + 1)! - n \times n!$$

2 Simplification des fractions

On factorise le numérateur et le dénominateur, et on utilise la formule $\frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}$ (a et c sont des entiers non nuls)

Exemple :

$$\text{Exemple 1 : } \frac{2x-6}{10x} = \frac{2(x-3)}{2 \cdot 5x} = \frac{x-3}{5x}$$

$$\text{Exemple 2 : } \frac{n^2-4}{n^2-2n} = \frac{(n+2)(n-2)}{n(n-2)} = \frac{n+2}{n}$$

$$\text{Exemple 3 : } \frac{5!}{4!} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 3 \times 4} = \frac{5}{1} = 5$$

Exercices 1 à 10 : simplifier les expressions suivantes :

(on part du principe que le dénominateur ne s'annule pas)

$$\frac{2n^3}{3n^2}; \frac{2-2a}{3-3a}; \frac{7!}{5!}; \frac{7!}{5!2!}; \frac{x^2-9}{x^2-3x}; \frac{x^2-1}{(x-1)^2}; \frac{9x^2+6x+1}{9x+3}; \frac{16x^2-9}{4x^2-3x}; \frac{(n+1)(n+2)}{n^2+3n+2}; \frac{(n+1)!}{n!}$$

3 Produits et quotients de fractions

Formules : Ce sont bien sûr les mêmes qu'au niveau 1.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad (b; d \neq 0) \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \quad (b; c; d \neq 0)$$

a est aussi une fraction : $a = \frac{a}{1}$

Ainsi, $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a \times 1}{b \times c} = \frac{a}{b \times c}$

On utilise aussi des formules sur les puissances :

$$\begin{aligned} (a^m) \times (a^n) &= a^{m+n} & \frac{1}{a^n} &= a^{-n} & \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \\ (a \times b)^n &= a^n \times b^n & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} & (a^m)^n &= a^{m \times n} \end{aligned}$$

Exemples :

$$\frac{2}{3} \times \frac{6}{a} = \frac{2 \times 6}{3 \times a} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times a} = \frac{4}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{a}{6}} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{a} = \frac{2 \times a}{3 \times 6} = \frac{2 \times a}{3 \times 2 \times 3} = \frac{a}{9}$$

$$2 \times \frac{6}{a} = \frac{2}{1} \times \frac{6}{a} = \frac{12}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{2}{6}}{\frac{a}{a}} = \frac{2}{6} = \frac{2 \times a}{1 \times 6} = \frac{2 \times a}{2 \times 3} = \frac{a}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{6}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{6}{2} = \frac{6 \times 1}{a \times 2} = \frac{3}{a}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{10}{4^3} = \frac{2^2 \times 10}{5^2 \times (2^2)^3} = \frac{2^2 \times 2 \times 5}{5^2 \times 2^2 \times 3} = \frac{2^3 \times 5}{5^2 \times 2^6} = \frac{1}{5 \times 2^3} = \frac{1}{40}$$

$$\frac{a^2-1}{a+2} \times \frac{a^2+4a+4}{a^2-2a+1} = \frac{(a^2-1)(a^2+4a+4)}{(a+2)(a^2-2a+1)} = \frac{(a+1)(a-1)(a+2)^2}{(a+2)(a-1)^2} = \frac{a+1}{a-1}$$

Exercices 1 à 10 : Simplifier ce qui suit :

$$a \times \frac{2}{3}; \frac{a}{\frac{2}{3}}; \frac{\frac{2}{3}}{a}; \frac{10^2 \times 45}{(12 \times 20)^2}; \frac{16000 \times 10^{-1} \times 0.02}{0.08 \times 10^3 \times (10^2)^{-4}}; \frac{a-1}{a+1} \times \frac{a^2-1}{a}; \frac{\frac{a-1}{a+1}}{\frac{a^2-1}{a}}; \frac{a^{2^3}}{(a^2)^3}; \frac{\frac{0.04 \times 5 \times 10^{-2}}{1.6 \times 10^3}}{\frac{(5 \times 10^{-2})^2}{4 \times 10^5}}; \frac{a^2+2a+1}{a-3} \times \frac{a^2-6a+9}{a^2-1}$$

4 Sommes et différences de fractions

Formules :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \times d}{c \times d} + \frac{b \times c}{c \times d} = \frac{ad+bc}{cd} \quad \text{et de même} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{a \times d}{c \times d} - \frac{b \times c}{c \times d} = \frac{ad-bc}{cd}$$

Mais dans la pratique, on va décomposer d'abord c et d en produit de nombres premiers (préliminaires de « fractions niveau 1 »)

Méthode : On réduit au même dénominateur.

Cependant, on cherche à obtenir le dénominateur le plus simple possible.

Pour ce faire, on utilise ce que l'on appelle le pgcd et le ppcm de deux nombres :

Le *pgcd* de a et b est le plus grand diviseur commun des entiers a et b.

Le *ppcm* de a et b est le plus petit commun multiple des deux entiers a et b.

Ce sera lui le dénominateur commun le plus simple.

Exemples :

Exemple 1 : Le pgcd de $15 = 3 \times 5$ et de $20 = 4 \times 5$ est 5. Le ppcm de $15 = 3 \times 5$ et de $20 = 4 \times 5$ est $3 \times 4 \times 5$.

On souhaite simplifier l'expression $\frac{2}{15} + \frac{3}{20}$. On procède comme suit :

$$\frac{2}{15} + \frac{3}{20} = \frac{2}{3 \times 5} + \frac{3}{4 \times 5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4 \times 5} + \frac{3 \times 3}{3 \times 4 \times 5} = \frac{8}{60} + \frac{9}{60} = \frac{17}{60}$$

Exemple 2 : Le pgcd de $2^3 \times 3^2 \times 5$ et de 2×3^5 est 2×3^2 . Leur ppcm vaut $2^3 \times 3^5 \times 5$.

On souhaite calculer $\frac{1}{2^3 \times 3^2 \times 5} + \frac{1}{2 \times 3^5}$. On procède comme suit :

$$\frac{1}{2^3 \times 3^2 \times 5} + \frac{1}{2 \times 3^5} = \frac{1}{(2 \times 3^2) \times 2^2 \times 5} + \frac{1}{(2 \times 3^2) \times 3^3} = \frac{3^3}{[(2 \times 3^2) \times 2^2 \times 5] \times 3^3} + \frac{2^2 \times 5}{[(2 \times 3^2) \times 3^3] \times 2^2 \times 5} = \frac{3^3 + 2^2 \times 5}{2^3 \times 3^5 \times 5} = \frac{47}{9720}$$

Exercices 1 à 10 : Calculer les sommes suivantes

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{10}; \frac{5}{6} + 1; \frac{3}{32} + \frac{5}{4}; \frac{3}{32} + \frac{7}{20}; \frac{7}{120} + \frac{1}{18}; \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}; \frac{3}{40} - \frac{7}{60}; \frac{3}{2048} + \frac{5}{1024}$$