Exos d'oraux.

ATS 2015 (PERDIGUES Xavier)

1. Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t}dt$ et de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}-e^{-t}}{t}dt$.
Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt = ln(2)$. (indication : $\frac{e^{-t}}{t} = \frac{e^{-t}-1}{t} + \frac{1}{t}$)
Montrer en dérivant par rapport à x que $\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_0^{x} \frac{e^{-2t}-e^{-t}}{t}dt + ln(2)$.
2. Condition sur z pour que (z-1)($\bar{z}$-2i) soit un imaginaire pur.

ATS 2015 (HAUT Bertrand)

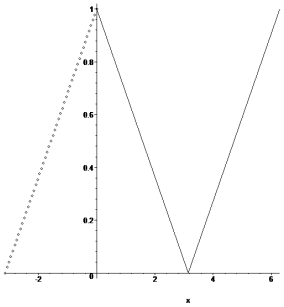
1. Intégrer l'équa diff : y'+ycos(x) = sin(x)cos(x)
2. Module et argument de $\frac{(1+i)(1+e^{2ix})}{1-e^{2ix}}$.

ATS 2015 (inconnu)

1. Rayon de la série entière $\sum \frac{n^{2n}}{(n+1)!}x^n$.
2. $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.

ATS 2015 (ROSLYJ Maxime)

1. Montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (on poura utiliser le théorème des accroissements finis)
2. Convergence de la suite $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.
3. (S) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=m \\ x+my+z=m+1 \end{cases}$. Ecrire le système sous forme matricielle. On appelle A la matrice 3-3 ainsi obtenue.
Trouver les conditions sur m pour que A soit inversible.
Discuter des solutions de (S) selon les valeurs de m.
Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.
4. Expliciter la courbe ci-dessous. (elle est 2 pi périodique) Calculer a_0 ; a_n ; ...



ATS 2015 (BONHOMME Benjamin)

1. Un système linéaire conduit à une matrice 3-3. Est-elle diagonalisable ?
2. $f(x) = \sqrt{4-x^2-y^2}$. Donner son ensemble de définition.
Calculer $\frac{df}{dx}$ et $\frac{df}{dy}$. Intégrer sur un morceau de camenbert.
3. (exo bonus) $D = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq 1\}$
Calculer $I = \iint_D xy(x+y)dxdy$

ATS 2015 (LONGE Morgan)

1. Rayon de S(x) = $\sum \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$, de T(x) = $\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et de $U(x) = \sum\limits_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$. Calcul de S et U.
2. x = 2-2i$\sqrt{3}$. Trouver les racines quatrièmes de x de deux façons différentes (forme trigo et algébrique)
En déduire la valeur de cos($\frac{11\pi}{12}$) et sin($\frac{11\pi}{12}$).

ATS 2015 (DETROIT Charly)

1. $\begin{cases} x+(t+1)y=1 \\ tx+(t+4)y=2 \end{cases}$. Résoudre en discutant selon la valeur de t.
2. $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$. Calculer $\sqrt{10}$ avec huit décimales.

ATS 2015 (NIEF Clément)

1. Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{ln(1+t^\alpha)}{t^2}dt$.
2. Montrer que $arctan(\frac{p}{q}) + arctan\left(\frac{q-p}{p+q}\right) = \frac{\pi}{4}$.

ATS 2016 (ALIBERT Lucas)

1. Intégrer l'équa diff : $sin(x)y'(x) - cos(x)y(x) + 1 = 0$
2. Trouver les racines doubles de $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.
Factoriser P(X) dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

ATS 2016 (EDEL Lucas)

1. Calculer$\int_1^{e^\pi} cos(ln(x))dx$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 + A = 2I$. En déduire l'inverse de A.

exo supplémentaire : dériver $\int_{x^3}^{2x} e^{t^2} dt$.

ATS 2016 (CHAPILLON Laurent)

1. Trouver les complexes z tels que $1 + z^2 + z^4 + ... + z^{14} = 0$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

A est-elle diagonalisable ?

ATS 2016 (DUSSET-JAMART Olivier)

1. Calcul de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{cos(kx)}{(cosx)^k}$.
2. Convergence et valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{ch(x)+2sh(x)} dx$.

ATS 2016 (PICONNEAUX Charlène)

1. dérivées et variatons de $\frac{1}{x}\int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$.
2. Calcul de $\int_0^1 \sqrt{x^2+2x} dx$.
3. Résoudre l'équation $z^2 - (11-5i)z + 24 - 27i = 0$.

ATS 2017 (BAKARI Imrane)

1. Intégrer l'équa diff : $(x^2-1)y' + xy + 1 = 0$ sur $]-1;1[$
2. CV et calcul de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+x}{1+x^6} dx$

ATS 2017 (POMMEY Thibault)

1. Calcul de $\sum_{n\geq 0} \frac{cos(nx)}{2^n}$
2. $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Montrer que $M^2 + 2M - 3I = 0$. En déduire que M est inversible et calculer M^{-1} .

Quel est le reste de la division de X^n par $X^2 + 2X - 3$?
En déduire la valeur de M^npour n entier naturel
3. $xy' + 2y = x^2$
ATS 2017 (CALACA Corentin)
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $\begin{cases} 2zz' = 1 \\ z + 2z' = \sqrt{3}iz \end{cases}$
2. $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$. Dérivée et sens de variation
3. $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a^2-a \\ 0 & a-1 & a & a^2-a \\ 1 & a & a & 0 \\ 0 & a-1 & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver a pour que l'application soit bijective.
4. Calculer $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x^2}{x^4-1} dx$

ATS 2017 (LACOUR Corentin)

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
2. Donner une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$, mais pas dans $\mathbb{R}$.
3. Etudier la suite $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$.
4. (bonus) $y'' + 9y = 3$; $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

ATS 2018 (SLAGMAN Anthonin)

1. Intégrer l'équa diff (x-2)y'+y+1=0
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^4 - 2z^2 + 5 = 0$

ATS 2018 (CUBY Corentin)

1. Discuter suivant les valeurs de m du nombre de points d'intersections de « y=mx » et « $y = e^x$ »
2. On donne une matrice A telle que $A^2 + 4A - 12I = 0$
Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
Quel est le reste de la division de X^n par $X^2 + 4X - 12$?
En déduire la valeur de A^n pour n entier naturel

ATS 2018 (VAN MERRIS Alexis)

1. Résoudre $z(z^2 + 2)(z - 3)^2(z^2 + z + 1) = 0$
Dessiner les solutions dans le plan complexe
Combien y en a-t-il sur le cercle unité ?
2. $xy' - y - (x^2 + 1) = 0$
Intervalles de $\mathbb{R}$ où l'on résout cette équa diff ?
Résoudre
Existe-t-il des solutions globales ?
3. Résoudre $sin^3x + cos^3x = 1$
(on pourra étudier la fonction $sin^3x + cos^3x$)

ATS 2018 (LAMRCHE Arthur)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z^4 - 2z^2 + 5 = 0$
2. DL à l'ordre 3 en 0 de $\frac{x}{e^x-1}$

ATS 2018 (CORNOT Maxime)

1. Calculer $A = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad B = \int_0^{1/2} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad C = \int_0^{1/2} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$
Indication : (pour C, on peut faire une IPP ; l'intégrale qui apparaît est A-C)
2. Résoudre $x^8 - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$. Factoriser alors $x^8 - 1$ dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

ATS 2018 (MARCELLIN Gael)

1. Etude de la série de terme général $u_n = ln(1 - \frac{1}{n^2})$
2. Rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$.

ATS 2018 (ANDRIANO Gaetan)

1. Justifier l'existence des intégrales $I = \int_0^{\pi/2} ln(sin(x))dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} ln(cos(x))dx$
Montrer que I=J grâce à un chgt de variable
Calculer I+J et en déduire I.
2. Etude de la paramétrée $\left(\frac{1}{1+t^2}; \frac{t^2}{1+t^2}\right)$
Etudier le chgt $t \hookrightarrow \frac{1}{t}$. Comment réduire l'intervalle d'étude ?

ATS 2018 (SAVE Baptiste)

1. $A \in M_2(\mathbb{R})$ est telle que il existe p entier tel que $A^p = 0$
On montreque $A^2 = 0$. Pour cela, on suppose qu p est le plus petit entier tel que $A^p = 0$.
Ainsi, comme $A^{p-1} \neq 0$, il existe un X de $\mathbb{R}^2$ tel que $A^{p-1}X \neq 0$.
11. Montrer que la famille $(X; AX; A^2X)$ est liée.
On a donc trois réels a ; b et c non tous nuls tels que $aX + bAX + cA^2X = 0$.
12. On multiplie alors par A^{p-1}. Montrer que $a = 0$.
13. Montrer que $b = 0$.
14. En déduire que $A^2X = 0$, puis que $A^2 = 0$.
15. Existe-t-il une matrice M telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. Dls à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}$; de $\sqrt{\frac{1+x}{1+2x}}$ et de $ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1+2x}}\right)$