

Total 2017 Exo 9

①

$$\text{Car}(A) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & -1 \\ 6 & 2-x & -6 \\ 7 & 1 & -5-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)[(x-2)(x+5)+6] - 6[-5-x+1] + 7[-6+2-x]$$

$$= (3-x)[x^2+3x-4] - 6[-4-x] + 7[-4-x]$$

$$(x+4)(x-1)$$

$$= (-x-4)[(3-x)(1-x)-6+7]$$

$$= (-x-4)[x^2-4x+3+1] = (-x-4) \underbrace{(x^2-4x+4)}_{(x-2)^2}$$

deux valeurs prop. : -4 et 2

On appelle $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3

On appelle f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f, \mathcal{B})$

Calcul de $E_2 = \{ \vec{u} \mid f(\vec{u}) = 2\vec{u} \}$. Avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$$\begin{cases} 3x+y-z = 8x \\ 6x+2y-6z = 2y \\ 7x+y-5z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z = 0 \\ x-z = 0 \\ 4x+y-7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x-z=0 \\ 4x-7z=0 \end{cases}$$

$\dim(E_2) = 1 \neq 2 = \text{multiplicité de } 2$. Donc A n'est pas diagonalisable

② $I = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \cos^3 t \, dt$ chgt $T = \sin t$ $dT = \cos t \, dt$

$$I = \int_0^1 T^2 (1-T^2) \, dT = \int_0^1 (T^2 - T^4) \, dT = \left[\frac{T^3}{3} - \frac{T^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$