

2017 Ex 8 partie 2

$$\textcircled{a} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB = AC$. On procède par l'absurde : Si A est inversible, alors, on multiplie à gauche par A^{-1} .

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC \Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$$

Or $B \neq C$. Contradiction, donc A est non inversible

$$\textcircled{b} \quad AF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d & g \\ \frac{1}{2} & e & h \\ \frac{1}{2} & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b+c & e+f & h+i \\ 3a+b+c & 3d+e+f & 3g+h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 = d = g \\ b+c = 0 = e+f = h+i \end{cases} \quad \text{càd} \quad \begin{cases} c = -b & f = -e & i = -h \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & e & f \\ -b & -e & -f \end{pmatrix}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & e & f \\ -b & -e & -f \end{pmatrix} \text{ où } b, e, f \in \mathbb{R} \right\}$$

Toute matrice de E s'écrit de la forme

$$F = b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U + e \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_V + f \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_W$$

$$\text{Donc } \boxed{E = \text{Vect}(U, V, W)}$$

E est un espace vectoriel de dim 3

Une base de E est $\mathcal{B} = (U, V, W)$