

2017 Exo 8 (partie 1)

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n + e^x$$

↖ on a simplifié par n

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} + e^x \leftarrow \text{on a décalé les indices}$$

$$= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + e^x = \underline{x e^x + e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ (car } +\infty)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2+1}{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x \right]$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x^2} \left[-\ln(1-x) - x \right]$$