

# oral 2017 Exc 3

①  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$

dans  $\mathcal{B}$ :  $1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   $1+X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $1+X^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det_{\mathcal{B}}(1, 1+X, 1+X^2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , donc les vecteurs sont liés.

3 vecteurs liés de  $\mathbb{R}_2[X]$  forment une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

②  $\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^3 dx$        $(\cos x)^3 = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3$

$\cos^3 x = \frac{1}{8} [e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}]$

$= \frac{1}{8} [(e^{i3x} + e^{-i3x}) + 3(e^{ix} + e^{-ix})]$

$= \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 6\cos(x)) = \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3\cos(x))$

$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) \right) dx = \left[ \frac{\sin(3x)}{12} + 3\frac{\sin(x)}{4} \right]_0^{\pi/2}$

$= \frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{12} + 3\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{4} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{-1+9}{12}$

$= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \mathcal{I}$

On pourrait aussi ~~libre~~ faire  $\text{chgt } X = \sin x$   
 $dX = \cos x dx$

$\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{(\cos x)^3 dx}{\cos x} = \int_0^1 \cos^2 x dX = \int_0^1 (1 - \sin^2 x) dX$

$= \int_0^1 (1 - X^2) dX = \left[ X - \frac{X^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$