

2017 Exo 10

14

A est diagonale car symétrique

$$\text{Car } A = \begin{vmatrix} 5-x & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5-x & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5-x & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-x & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 5-x & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 5-x & 0 \\ 3-x & 3-x & 3-x & 3-x \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_4+L_2+L_3+L_1 \end{array}$$

$$= (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 5-x & x-5 & x-7 & x-5 \\ 0 & 5-x & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 7-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{dét}}{=} \stackrel{\text{ligne 4}}{=} (3-x) \begin{vmatrix} x-5 & x-7 & x-5 \\ 5-x & 0 & -2 \\ 2 & 7-x & 2 \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} x-5 & x-7 & x-5 \\ 5-x & 0 & -2 \\ x-3 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2-C_1, C_3-C_1, C_4-C_1 \\ L_4+L_3 \end{array}$$

$$\stackrel{\text{dét}}{=} \stackrel{\text{col 2}}{=} (3-x) \begin{vmatrix} 5-x & -2 \\ x-3 & x-3 \end{vmatrix} = (3-x)(x-3)(7-x) \begin{vmatrix} 5-x & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)(x-3)(7-x)[5-x-2] = \boxed{(x-7)^2(x-3)^2}$$

(2) avec $z = x+iy$ $(z-1)(\bar{z}-2i) = (x-1+iy)(x-i(y+2))$

$$= x^2 - x + iy^2 + 2iy + i(xy - xy + y + 2x - 2)$$

est nul car pour
 $(z-1)(\bar{z}-2i) \in \mathbb{R}$ lorsque $x^2 - x + iy^2 + 2iy = 0$

$$\text{car } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{5}{4}$$

C'est le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

je ne suis pas sûr de l'exo!