

① $z = a + ib$ $\frac{z^2}{z+i} = \frac{a^2 - b^2 + i2ab}{a + i(b+i)} = \frac{(a^2 - b^2 + i2ab)(a - i(b+i))}{a^2 + (b+i)^2}$ $z \neq -i$

$\frac{z^2}{z+i} = \frac{a^3 - ab^2 + 2ab^2 + 2ab + i(2a^2b - a^2b + b^3 - 2 + b^2)}{a^2 + (b+i)^2} = \frac{a^3 + ab^2 + 2ab + i(\dots)}{a^2 + (b+i)^2}$

$\frac{z^2}{z+i}$ est un afin réel pour lorsque sa partie réelle est nulle :

$a^3 + ab^2 + 2ab = 0 \Leftrightarrow a(a^2 + b^2 + 2b) = 0 \Leftrightarrow a(a^2 + (b+i)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ \text{ou} \\ a^2 + (b+i)^2 = 1 \end{cases}$

C'est la droite verticale d'éq $x=0$, plus le cercle de centre $(0, -1)$ de rayon 1, privé du point $A(0, -1)$ (car $z \neq -i$)

② $\begin{cases} mx + (m+1)y = 1 \\ (m+2)x + (m+4)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (m+1)y = 1 \\ (4-m^2)y = 2-m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (m+1)y = 1 \\ (4-m^2)y = 2-m \end{cases}$

1^{er} cas : $m = 2$: $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

C'est la droite d'éq $x+3y=1$
 $\begin{cases} x = -3t+1 \\ y = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

2^{er} cas : $m = -2$: $\begin{cases} x - y = 1 \\ 0 = 4 \end{cases}$ $\mathcal{S} = \emptyset$

3^{er} cas : $m \neq \pm 2$: $\begin{cases} x + (m+1)y = 1 \\ y = \frac{2-m}{(2-m)(2+m)} = \frac{1}{2+m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{m+1}{2+m} = \frac{2+m - (m+1)}{2+m} \\ y = \frac{1}{2+m} \end{cases}$

Une solution unique : $\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2+m}, \frac{1}{2+m} \right) \right\}$

Rapport de jury 2022

$$\textcircled{3} \begin{cases} x(t) = 3t^2 - 2 \\ y(t) = 3t - t^3 \end{cases}$$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}$. x est pair ($x(-t) = x(t)$)
et
 y est impair

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Etude sur \mathbb{R}^+ + sym / Ox

$x'(t) = 6t$ x' s'annule en 0

$y'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1-t^2) = 3(1-t)(1+t)$ y' s'annule en ± 1

t	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	0	+	+
x	-2	→	$+\infty$
y'	3	+	0
y	0	→	$-\infty$

en 0: c'est le point $M(0) = (-2, 0)$

$\vec{T}(0) = (0, 3)$ Tangente verticale

en 1: $M(1) = (1, 2)$

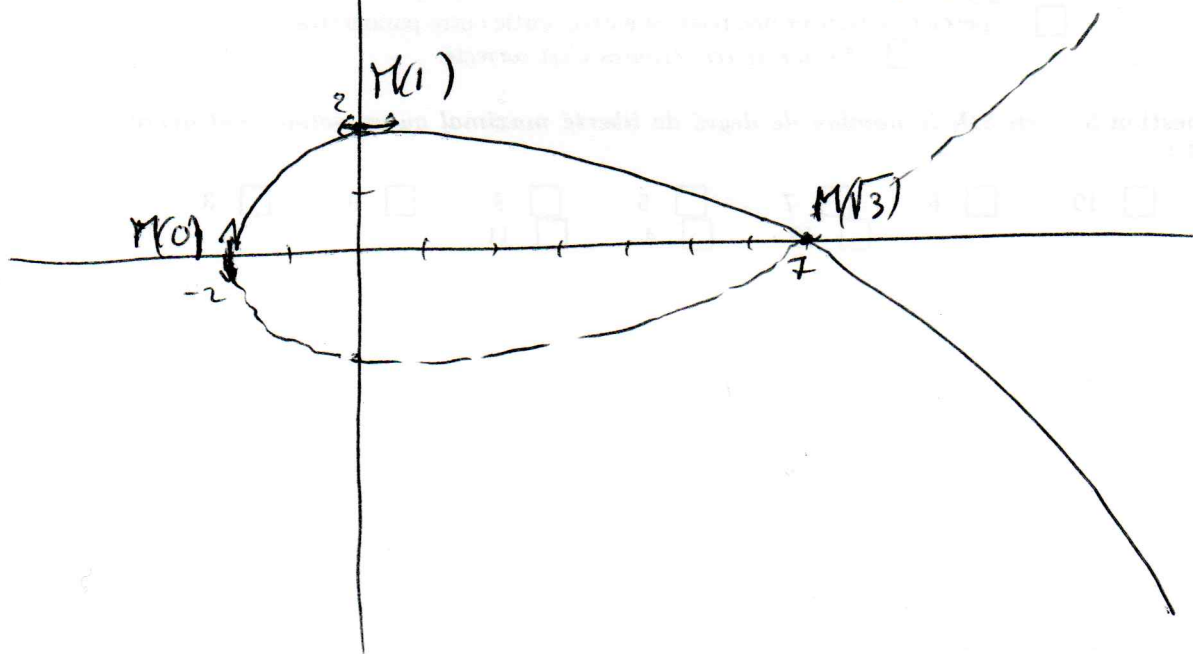
$\vec{T}(1) = (6, 0)$ Tgte horizontale

en $+\infty$: x et $y \rightarrow \infty$ asymptote oblique?

$$\frac{y}{x} = \frac{3t - t^3}{3t^2 - 2} \sim \frac{-t^3}{3t^2} = -\frac{t}{3} \rightarrow +\infty$$

\mathbb{R}^+ a pas de droite asymptote.

y s'annule qd $t=0$ et $t^2=3$ c'ad $t = \pm\sqrt{3}$
 $x(\sqrt{3}) = 9 - 2 = 7$



$$(4) \frac{2-2\cos x}{x^2} = \frac{2-2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+O(x^4)\right)}{x^2} = \frac{x^2-\frac{x^4}{12}+O(x^4)}{x^2} = 1-\frac{x^2}{12}+O(x^2)$$

$$\left(\frac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln\left(1-\frac{x^2}{12}+O(x^4)\right)} = e^{\frac{1}{x^2}\left[-\frac{x^2}{12}+O(x^4)\right]} = e^{-\frac{1}{12}+O(x^2)} \rightarrow e^{-\frac{1}{12}}$$

(5) $f(x) = x^{2k-1} e^{-x^2}$ est impaire, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$ (symétrie 10)

$$(5_2) \mathcal{I}_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-1} \cdot x e^{-x^2} dx$$

IPP

$$\begin{cases} u = x^{2k-1} & u' = (2k-1)x^{2k-2} \\ v' = x e^{-x^2} & v = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \end{cases}$$

$$\mathcal{I}_{2k} = \left[-\frac{1}{2} x^{2k-1} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2k-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k-2} e^{-x^2} dx = \frac{2k-1}{2} \mathcal{I}_{2k-2}$$

"0" CQFD

$$(5_3) \mathcal{I}_0 = \sqrt{\pi} \quad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2} \mathcal{I}_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \mathcal{I}_4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\mathcal{I}_6 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$