

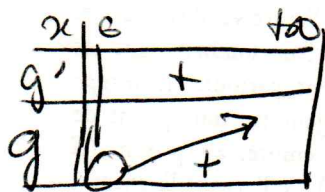
2022 Tristan

(1) $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$

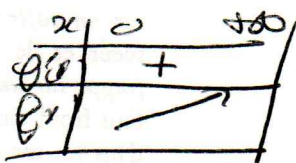
$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt + \frac{1}{x} e^{\sqrt{x}}$

$= \frac{2e^{\sqrt{x}} - \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt}{x^2} = g(x)$

$g'(x) = \cancel{e^{\sqrt{x}}} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - \cancel{e^{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}}{2} e^{\sqrt{x}} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$



$g(0) = 0$, donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}$



(2) $f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$
 $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P} - \mathcal{P}'$
 • f va de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$
 • Montrons que f est linéaire :

Soit \mathcal{P} et $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$ Soit a et $b \in \mathbb{R}$.

$f(a\mathcal{P} + b\mathcal{Q}) = (a\mathcal{P} + b\mathcal{Q}) - (a\mathcal{P} + b\mathcal{Q})' = a\mathcal{P} + b\mathcal{Q} - a\mathcal{P}' - b\mathcal{Q}'$
 $= a(\mathcal{P} - \mathcal{P}') + b(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}') = a f(\mathcal{P}) + b f(\mathcal{Q})$. Donc f est linéaire

• Noyau de f : $\mathcal{P} \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathcal{P} - \mathcal{P}' = 0$

C'est une équation diff homogène: $\mathcal{P} = Ae^x$

La fonction Ae^x n'est pas un polynôme, sauf quand $A = 0$.

Donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est bijective

f est un endomorphisme bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est sa un automorphisme!

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{i\pi/6}$

les racines carrées de $e^{i\pi}$ sont les $\pm \sqrt{e}^{i\pi/2}$

ici: les racines carrées de $e^{i\pi/6}$ sont $\pm e^{i\pi/12}$