

2022 MBA YE Simon

①  $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$  Hint:  $y_h = Ae^{-x}$

Sol Particulière: MVC  $y_p = A(x)e^{-x}$   $y'_p = A(x)e^{-x} - A(x)e^{-x}$

$y'_p + y_p = A(x)e^{-x} - A(x)e^{-x} + A(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \Rightarrow A'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

$A(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$  chgt de variable  $X = e^x$   $\frac{dX}{dx} = e^x$   $dX = e^x dx$

$A(x) = \int \frac{1}{1+X} dX = \ln|1+X| = \ln(1+e^x) \Rightarrow y_p = \ln(1+e^x)e^{-x}$

Sol de l'eq complète:  $y = (A + \ln(1+e^x))e^{-x}$

②  $P = P_{B \rightarrow B} = \begin{pmatrix} \text{coord de } \vec{u} \text{ dans } B \\ \vec{u} \\ \text{dans } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$f(\vec{u}) = A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4\vec{u}$  et  $f(\vec{v}) = \dots = 8\vec{v}$

Donc  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs propres (pour les valeurs propres 4 et 8)

Mat(B) =  $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$A'^m = \begin{pmatrix} 4^m & 0 \\ 0 & 8^m \end{pmatrix}$   $A = P A' P^{-1} \Rightarrow A^m = P A'^m P^{-1}$

$A^m = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^m & 0 \\ 0 & 8^m \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \cdot 4^m & 2 \cdot 4^m \\ -3 \cdot 8^m & -2 \cdot 8^m \end{pmatrix}$

$A^m = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 \cdot 8^m - 10 \cdot 4^m & 4 \cdot 8^m - 4 \cdot 4^m \\ 15 \cdot 4^m - 15 \cdot 8^m & 6 \cdot 4^m - 10 \cdot 8^m \end{pmatrix}$