

2022 MAZZALI Maths

$$B_1 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{l}) \quad B_2 = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a^{-1} \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\beta(\vec{l} - a\vec{k})$ $\beta(\vec{c}) - (a-1)\beta(\vec{k})$
 $\beta(\vec{j} - a\vec{i})$ $\beta(\vec{c} + (1-a)\vec{l})$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-a^2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_3 + aC_2 \quad C_4 - C_2 = \beta(\vec{l} - \vec{j} + \vec{k})$$

$$= \beta(\vec{k}) + a\beta(\vec{j} - a\vec{i}) = \beta(-a^2\vec{i} + a\vec{j} + \vec{k})$$

à cause des colonnes C_1, C_2 et C_4 , le rang est toujours 3,

$$\text{donc } \boxed{\text{Im}(B) = \mathbb{R}^3}$$

le noyau de β est donné par la colonne 3 : $= \beta(-a^2\vec{i} + a\vec{j} + \vec{k}) = \vec{0}$
 lorsque $a = \pm 1$

$$\text{et par } C_3 - (1-a^2)C_4 = \beta(-a^2\vec{i} + a\vec{j} + \vec{k}) - (1-a^2)\beta(\vec{l} - \vec{j} + \vec{k})$$

$$= \beta(-\vec{i} + (-a^2+a+1)\vec{j} + \vec{k} + (a^2-1)\vec{l})$$

lorsque $a \neq \pm 1$

Donc $\text{Ker}(\beta) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -a^2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ qd $a = \pm 1$
 et $\text{Ker}(\beta) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -a^2a+1 \\ a^2-1 \end{pmatrix}$ qd $a \neq \pm 1$

$$\textcircled{2} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{n+1}{n+1}}{\binom{n+1}{2n+1}} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+2)} \frac{n^n}{n^n} \sim \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \sim \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2$$

du double de $(\frac{n+1}{n+2})^2$

$$u_n = e^{n \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)} = e^{-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{-n \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]} = e^{-1 + o(1)} \rightarrow e^{-1}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum u_n$ Div