

①. $Z^m = 1 = e^{i0}$. Solution: $Z_k = e^{i \frac{2k\pi}{m}}$ où $k \in \mathbb{Z}$ $k=0,1,\dots,m-1$ suffisent!

$(z+1)^m = (z-1)^m \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^m = 1$ ($z \neq 1$ sinon $z^m = 0$)

On pose $\frac{z+1}{z-1} = z$. $Z_k = e^{i \frac{2k\pi}{m}}$; $\frac{z_k+1}{z_k-1} = e^{i \frac{2k\pi}{m}} \Leftrightarrow z_k+1 = e^{i \frac{2k\pi}{m}} (z_k-1)$

$\Leftrightarrow 1 + e^{i \frac{2k\pi}{m}} = z_k (e^{i \frac{2k\pi}{m}} - 1) \Leftrightarrow z_k = \frac{1 + e^{i \frac{2k\pi}{m}}}{e^{i \frac{2k\pi}{m}} - 1}$ ($k \neq 0$ sinon (ou diré par 0))

$\Leftrightarrow z_k = \frac{e^{-i \frac{2k\pi}{m}} (e^{-i \frac{2k\pi}{m}} + e^{i \frac{2k\pi}{m}})}{e^{i \frac{2k\pi}{m}} (e^{+i \frac{2k\pi}{m}} - e^{-i \frac{2k\pi}{m}})} = \frac{2 \cos(\frac{2k\pi}{m})}{2i \sin(\frac{2k\pi}{m})} = \frac{-i \cot(\frac{2k\pi}{m})}{\sin(\frac{2k\pi}{m})}$ où $k=1,2,\dots,m$

②. On résout l'équa diff $ax y' + b(x) y = 0$ sur un intervalle où la fonction a ne s'annule pas (car $y_H = A e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$)

Ici, on résout sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*}

Hot: $y_H = A e^{-\int \frac{1}{x^2} dx} = A e^{\frac{1}{x}}$ où $A \in \mathbb{R}$

Sol part: On voit que $y_2 = 1$ convient (ou on fait un MVC)

Sols de l'éq complète: $y = A e^{\frac{1}{x}} + 1$ sur \mathbb{R}^{+*}

$y = B e^{\frac{1}{x}} + 1$ sur \mathbb{R}^{-*}

Si $A \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \infty$ car $e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$

Donc si on veut une sol sur \mathbb{R} , il faut $A=0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = 1 \cdot \forall B$.

On peut recoller en 0 de façon continue pour tout B. Mais si on veut une fonction dérivable, il faut prendre $B=0$ (on calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$)

~~2022~~ ~~15~~

$$\textcircled{3} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2B \quad \text{ou } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Il semble que $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. On le vérifie par récurrence :

Hérédité : On prend un $n \geq 1$. On suppose que $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$$B^{n+1} = B^n \cdot B = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{CQFD}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

$A^n = 2^n B^n$, donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 0 & 2^{2n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2^{2n-1} & 0 & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$$

$$④ \bullet n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n} - 2n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \leq n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2+n \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{4} \quad \text{YES.} \quad \text{CQFD}$$

• pour $n=1$: $\sqrt{2} - 1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq 1$

pour $n=2$: $2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

pour $n=3$: $2\sqrt{4} - 2\sqrt{3} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

pour n : $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

ou les additions :

on trouve $2\sqrt{n+1} - 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = l_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = +\infty}$

La suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Diverge.