

ATS 2011 (GUITON Pierre)

$$\begin{aligned} \omega^2 \sin(5x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i} \right) = \frac{1}{8i} (e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}) (e^{i5x} - e^{-i5x}) \\ &= \frac{1}{8i} ((e^{i7x} - e^{-i7x}) + 2(e^{i5x} - e^{-i5x}) + (e^{i3x} - e^{-i3x})) \\ &= \frac{1}{8i} (2i \sin(7x) + 4i \sin(5x) + 2i \sin(3x)) = \frac{1}{4} \sin(7x) + \frac{1}{2} \sin(5x) + \frac{1}{4} \sin(3x) \end{aligned}$$

$y'' + xy' + y = 0$. Le coefficient devant y' n'est pas constant. On ne peut donc pas utiliser la méthode classique avec le polynôme caractéristique.

On pose $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. $y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ $y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$$y'' + xy' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n] x^n = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 x^n$$

Avec l'unicité du Développement en Série Entière: $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1) a_{n+2} + (n+1) a_n = 0$

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$ (1)

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} \quad a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 4} \quad a_6 = -\frac{a_4}{6} = -\frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

Il semble que $a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n n!}$; ce que l'on peut facilement vérifier par récurrence à l'aide de (1)

De même, pour les impairs, on trouve: $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{3 \cdot 5 \cdot (2n+1)} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}$

les solutions de l'équation diff sont donc les $y = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Reçu:

Avec les S.E. connues, on peut reconnaître f

(mais pas g qui est trop vilain)

en effet $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$g(x)$