

$$\textcircled{1} \int_0^2 \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx = \int_0^2 \frac{x+3}{(x+1)^2+1} dx = \int_0^2 \frac{x+3}{(x+1)^2+1} dx$$

chgt $X=x+1 \quad dX=dx \quad \int_1^3 \frac{X-1+3}{X^2+1} dX = \int_1^3 \frac{X+2}{X^2+1} dX$

$$\int_1^3 \frac{X}{X^2+1} dX + 2 \int_1^3 \frac{1}{X^2+1} dX = \frac{1}{2} [\ln(X^2+1)]_1^3 + 2 [\arctan X]_1^3$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(10) - \ln 2) + 2 \arctan(3) - 2 \arctan 1$$

$$= \frac{1}{2} \ln 5 + 2 \arctan(3) - 2 \arctan 1$$

$$\textcircled{2} z^6 + 2z^3 + 4 = 0 \quad \text{On pose } Z=z^3 \quad Z^2 + 2Z + 4 = 0$$

$$\Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2 \quad Z = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i 2\pi/3}$$

1^{er} cas : $z^3 = 2e^{i 2\pi/3} \quad z_k = 2^{1/3} e^{i(\frac{2\pi k}{3} + \frac{2\pi k}{3})} \quad \text{avec } k=0, 1 \text{ ou } 2$

cad $z_0 = 2^{1/3} e^{i 2\pi/3} ; z_1 = 2^{1/3} e^{i 4\pi/3} ; z_2 = 2^{1/3} e^{i 6\pi/3}$

2^{es} cas : $z^3 = 2e^{-i 2\pi/3} \quad z_k = 2^{1/3} e^{-i(\frac{2\pi k}{3} + \frac{2\pi k}{3})} \quad \text{avec } k=0, 1 \text{ ou } 2$

$z'_0 = 2^{1/3} e^{-i 2\pi/3} \quad z'_1 = 2^{1/3} e^{-i 4\pi/3} \quad z'_2 = 2^{1/3} e^{-i 6\pi/3}$

Réponse : On peut factoriser $X^6 + 2X^3 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^6 + 2X^3 + 4 = (X - 2^{1/3} e^{i 2\pi/3}) (X - 2^{1/3} e^{-i 2\pi/3}) (X - 2^{1/3} e^{i 4\pi/3}) (X - 2^{1/3} e^{-i 4\pi/3}) (X - 2^{1/3} e^{i 6\pi/3}) (X - 2^{1/3} e^{-i 6\pi/3})$$

puis dans $\mathbb{R}[X]$ en regroupant les complexes conjugués

$$X^6 + 2X^3 + 4 = (X^2 - 2 \cdot 2^{1/3} \cos(\frac{2\pi}{3}) X + 2^{2/3}) (X^2 - 2 \cdot 2^{1/3} \cos(\frac{4\pi}{3}) X + 2^{2/3}) (X^2 - 2 \cdot 2^{1/3} \cos(\frac{6\pi}{3}) X + 2^{2/3})$$